Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

9. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók. Definíció. A $G = (V,E)$ irányítatlan gráf *elvágó éle* (*elvágó pontja*) a G olyan e éle (olyan v pontja), amelyre $(G-e)$-nek ($(G-v)$-nek) több komponense van, mint G-nek. A G gráf 2-*élösszefüggő*, ha G összefüggő és G-nek nincs elvágó éle. A G gráf 2-*összefüggő*, ha G összefüggő, legalább 3 csúcsa van és G-nek nincs elvágó pontja. A *blokk* olyan összefüggő gráf, aminek nincs elvágó pontja (azaz vagy K_1, vagy K_2, vagy egy 2-összefüggő gráf.) A G *maxblokkja* a G egy tartalmazásra nézve maximális blokk részgráfja (azaz olyan részgráf, ami blokk, de nincs benne másik blokk részgráfban), a G 2-*komponense* pedig a G tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfja.

Megfigyelés. Tetszőleges G véges, irányítatlan gráf esetén

(1) A G 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei.

(2) A 2-komponensek faszerűen csatlakoznak egymáshoz G elvágó élei mentén. (Minden 2-komponenst egy-egy csúcsba összevonva G-ből egy körmentes gráfot (erdőt) kapunk.)

(3) A G maximális blokkjai faszerűen csatlakoznak egymáshoz. (Azaz a $T_2(G)$ gráf erdő, ahol $T_2(G)$ csúcsai a G blokkjai és G elvágó pontjai, élei pedig az illeszkedő blokk-elvágó pont párok.)

Definíció. A G gráf K 2-komponense *levél*, ha K a G-nek pontosan egy elvágó éléhez csatlakozik. A K 2-komponens *izolált*, ha nem csatlakozik hozzá G egyetlen elvágó éle sem, azaz ha K a G egy olyan kompnense, ami 2-élösszefüggő.

Definíció. A G gráf *levélblokkja* a G olyan B blokkja, amely G-nek pontosan egy elvágó pontját tartalmazza. A B blokk *izolált*, ha B nem tartalmazza G egyetlen elvágó pontját sem, más szóval a B blokk a G egy komponense.

Tétel. A G gráfba a 2-élösszefüggőség eléréséhez behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\cdot\ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. izolált 2-komponenseinek számát jelöli.

Tétel. A G gráfba a 2-összefüggőség eléréséhez (azaz G blokkjainak összeolvasztásához) behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G)-1, \left\lceil \frac{m(G)+2\cdot m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$, ahol $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. izolált blokkjai száma, $b(G)$ pedig a G-ből egy csúcs elhagyásával keletkező gráf komponenseinek maximális száma.

Definíció. Legyen $G = (V,E)$ multigráf. Ekkor $u, v \in V$ csúcsaira $\lambda(u,v)$ jelöli az u-ból v-be vezető, páronként éldiszjunkt utak max számát. Menger tétele miatt ez egyenlő az u-t és v-t szeparáló élhalmazok minimális méretével, azaz a legkisebb olyan X élhalmaz mérete, melyre u és v a $G-X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van. Hasonlóan, $\kappa(u,v)$ pedig az u-ból v-be vezető páronként belsőleg pontdiszjunkt utak maximális számát jelöli. Ha u és v nem szomszédosak, Menger tétele szerint ez egyenlő az u-t és v-t szeparáló csúcshalmazok minimális méretével, azaz legkisebb olyan X csúcshalmaz mérete, melyre u és v a $G-X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van (ilyenkor $u, v \notin X$ szükségszerű).

Definíció. A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u,v) : u, v \in V\}$. Ez megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Definíció. A G *(pont)összefüggőségi száma* $\kappa(G) := \min\{\lambda(u,v) : u, v \in V\}$. Ha G-ben vannak nem szomszédos csúcsok, akkor ez megegyezik azon csúcsok minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Definíció. A G *vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhamazából induló élek $E(X)$ halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés. Adott u, v-re egy folyamalgoritmussal meghatározható $\lambda(u,v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmussal található minimális vágás. (Sőt: $n-1$ is elég, hiszen u rögzíthető.)

Megfigyelés. Legyen u és v a G multigráf két különböző csúcsa. Ha G-nek van az u-t és v-t szeparáló minimális vágása, akkor $\lambda(G) = \lambda(u,v)$. Ha nincs ilyen minimális vágása G-nek, akkor G minimális vágásai megegyeznek az u és v csúcsok összeragasztásával (összehúzásával) képzett G/uv gráf minimális vágásaival, azaz $\lambda(G) = \lambda(G/uv)$.

Definíció. A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \le i \le n-1$ esetén a $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ halmazba a v_i csúcsból legalább annyi él megy, mint bármely v_j-ből, ha $j > i$. Azaz a soron következő v_i csúcs mindig a korábbi csúcsok halmazához legtöbb éllel kapcsolódó csúcsok egyike.

Lemma. Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a $\{v_n\}$ minimális élszámú olyan vágást határoz meg, ami v_n-et és v_{n-1}-et szeparálja.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus

Input: $G = (V,E)$ multigráf, Output: G egy X minimális vágása.

I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjét.

II. Felírjuk a v_n-ből kiinduló élek halmazát (minvágásjelölt).

III. Ha több mint két csúcs van, összeragasztjuk a v_n és v_{n-1} csúcsokat. GoTo I.

IV. Ha már csak két csúcs van, akkor az $n-1$ feljegyzett minvágásjelöltből kiválasztjuk az egyik legkisebbet. Ez egy minvágás lesz G-ben, mérete G élösszefüggőségi száma. (Vegyük észre: az összeragasztások miatt a minvágásjelöltek

az eredeti G-ben nem feltétlenül egy csúcsból, hanem egy csúcshalmazból kilépő élek halmazai.)
Tétel. Ha G 2-élösszefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy *csúcsból* fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek mindkét végpontja az eddig felépített gráfban van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. *A fül két végpontja lehet azonos.* Megfordítva is igaz: ha egy gráfnak van ilyen fülfelbontása, akkor 2-élösszefüggő.
Tétel. Ha G 2-összefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy *körből* fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek két végpontja az eddig felépített gráfon van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. *A fül két végpontja nem lehet azonos.* Megfordítva is igaz: ha egy gráfnak van ilyen fülfelbontása, akkor 2-összefüggő.

Gyakorlatok

1. Legyenek a G gráf csúcsai a 42-nél kisebb (pozitív) prímszámok, és pontosan akkor fusson él két különböző, u és v csúcs között, ha $u-v$ osztható öttel, vagy $u+v$ kétjegyű prímszám.
a) Rajzoljuk föl G-t.
b) Rajzoljuk föl a G 2-komponenseiből és elvágó éleiből álló erdőt. Határozzuk meg, legkevesebb hány él behúzásával tehető G 2-élösszefüggővé, és mutassunk is példát megfelelő élek behúzására.
c) Rajzoljuk föl a $T_2(G)$ gráfot. Határozzuk meg, legkevesebb hány él behúzásával tehető G 2-összefüggővé, és mutassunk is példát megfelelő élek behúzására.

2. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Hogyan függ a G 2-komponenseinek számától azon élek minimális száma, amelyeket behúzva G-be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik?

3. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan maxblokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális méretű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik.

4. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 maxblokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.

5. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy legalább 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G=(V,E)$ gráfban találhatók olyan (u_1,w_1) és (u_2,w_2) pontpárok, amikre $w_1 \neq w_2$, valamint $\lambda(u_1,w_1)=d(w_1)$ és $\lambda(u_2,w_2)=d(w_2)$ teljesül.

7. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: 7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?

8. Igazoljuk Robbins tételét: egy G irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő. (Egy D irányított gráf akkor erősen összefüggő, ha bármely u,v csúcsra létezik D-ben irányított uv-út.)

9. Igazoljuk, hogy ha G-nek van fülfelbontása, akkor G bármely két fülfelbontása ugyanannyi fület tartalmaz.

10. Tegyük fel, hogy a G gráf 2-élöf és nincs 2-fokú csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy van G-nek olyan e éle, amire a $G-e$ gráf is 2-élöf. Igaz-e hasonló állítás a 2-élöf helyett 2-öf tulajdonsággal?

11. Tegyük fel, hogy a G gráfnak olyan fülfelbontása van, amelyben minden fül páratlan sok élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G minden v csúcsához található G egy olyan M párosítása (azaz közös végpont nélküli éleinek halmaza), hogy a v csúcs kivételével G minden csúcsára illeszkedik M-beli él.

12. Adjunk meg olyan eljárást, ami tetszőleges irányítatlan G input gráf esetén meghatározza a legkisebb olyan k pozitív egész számot, amire hozzáadható G-hez k él úgy, hogy a kapott gráf 2-szeresen élösszefüggő legyen, és a hozzáadott élek utat alkossanak.

13. Igazoljuk, hogy minden erősen összefüggő G gráf előállítható egy irányított körből kiindulva irányított fülek egymás utáni hozzávételével.

14. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben az első fül egy C_3, minden további fül pedig 2 élt tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy G minden éle kiszínezhető a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére úgy, hogy egyetlen él kap fehér színt, továbbá a piros élek a fehér éllel együtt a G egy feszítőfáját alkossák, valamint a zöld élek a fehér éllel együtt szintén a G egy feszítőfáját alkossák.