Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

8. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Definíció. *Egészprogramozási feladatnak (IP)* egy olyan LP vagy DLP feladatot hívunk, ahol további megkötés, hogy a változóknak egész értéket kellfelvenniük, sztenderd alakban $\max cx\colon Ax \le b, x \in \mathbb{Z}^n$. Egy IP feladat **LP relaxáltját** úgy kapjuk, ha az egészértékűségi feltételeket elhagyjuk az IP-ből (azaz megengedünk megoldásokat $x \in \mathbb{R}^n$-ből is). Ha LP és DLP duális feladatpár, akkor az x és y-beli változózók egészértékűségét megkívánva kapjuk az IP és DIP egészprogramozási feladatokat.

Megfigyelés. Ha LP egy $\max cx$, DLP pedig egy $\min yb$ típusú feladat és mindkettőnek van megoldása, akkor a megfelelő egészprogramozási feladatokra teljesül, hogy

$$\max_{IP} cx \le \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \le \min_{DIP} yb$$

Cél: olyan feltétel, ami biztosítja, hogy a fenti egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség álljon.

Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix *teljesen unimoduláris (TU)*, ha A bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1.

Megfigyelés. TU mátrix minden eleme 0 vagy ± 1.

Állítás. Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha (1) transzponáljuk, (2) valamely sorát/oszlopát (-1)-gyel végigszorozzuk, (3) valamely sorát/oszlopát megismételjük/töröljük, (4) két sorát/oszlopát felcseréljük, (5) A-t egy 1 db 1-esen kívül csupa 0-kat tartalmazó sorral/oszloppal bővítjük.

Tétel. Tfh A TU mátrix és a b vektor koordinátái egészek. Ekkor a $\max cx\colon Ax \le b, x \in \mathbb{Z}^n$ IP feladatra és LP relaxáltjára $\max_{IP} cx = \max_{LP} cx$ teljesül. Ha pedig A TU és c egész, akkor a DIP-re és relaxáltjára (DLP) teljesül, hogy $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$. Szavakban: TU együtthatómátrix és egész konstansok (ill. célfvegyütthatók) esetén ha az LP-nek (ill. a DLP-nek) van optimuma, akkor az optimumérték egész változókkal megadható megoldáson is felvétetik, vagyis az egészértékűségi megszorítás nem ront az optimum értékén.

Definíció. A $G = (V,E)$ irányított gráf $B(G)$ *illeszkedési mátrixának* (avagy incidenciamátrixának) sorai V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és a v csúcs és e él által meghatározott (v,e) pozícióban 1 áll, ha e a v-ből kilép, -1, ha belép, és 0, ha v nem végpontja e-nek. Irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa hasonló: ha v végpontja e-nek, akkor 1 áll, ha nem akkor 0.

Állítás. Ha G irányított gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrixa TU tulajdonságú.

Következmény. Ha G páros gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrix TU.

Gyakorlatok

1. Egy $G = (V,E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

Megoldás: Minden e élhez egy-egy $x(e)$ változó fog tartozni, és olyan IP-t szeretnénk felírni, aminek a megoldásai kizárólag a 2-faktorok karakterisztikus vektorai lesznek. (Egy 2-faktor karakterisztikus vektora egy élen annak megfelelően vesz fel 1 ill. 0 értéket, hogy az adott él hozzátartozik-e a 2-faktorhoz vagy sem.)

Nekünk a karakterisztikus vektorával megadott 2-faktor éleinek összsúlyát kell maximalizálni. Itt látszik a karakterisztikus vektor egy előnye: az összsúly felírható $\sum_{e\in E(G)} c(e)\cdot x(e)$ alakban, ugyanis ha $x(e) = 0$, akkor az e él súlya nem szerepel az összegben, ha pedig $x(e) = 1$, akkor az e él hozzájárulása éppen $c(e)$. A célfüggvény tehát megvan, keressük meg az IP feltételeket. Kezdjük a karakterisztikus vektor tulajdonság megkövetelésével: megkívánjuk minden e élre az $x(e) \ge 0$ nemnegativitási és az $x(e) \le 1$ lineáris feltételeket, valamint az $x(e) \in \mathbb{Z}$ egészértékűségi feltételt. E három feltételt minden $x(e)$-re megkövetelve elértük, hogy a megoldás csakis egy élhalmaz karakterisztikus vektora lehet.

A 2-faktor tulajdonság minden v csúcsra megkívánja, hogy *pontosan* két él induljon v-ből, és ezt könnyű lineáris feltétellé átfogalmazni: minden $v \in V$ esetén a $\sum_{e\colon v\in e} x(e) = 2$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Világos, hogy tetszőleges 2-faktor karakterisztikus vektora teljesít minden fenti feltételt. Fordítva, ha az $x(e)$ változók teljesítik a fenti feltételeket, akkor minden $x(e)$ értéknek 0-nak vegy 1-nek kell lennie, és minden csúcsból pontosan két olyan élnek kell kiindulnia, amelyikhez tartozó x változó értéke 1. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\{e \in E(G)\colon x(e) = 1\}$ élhalmaz egy 2-faktor, más szóval x egy 2-faktor karakterisztikus vektora.

A feladat második kérdéséhez azt figyeljük meg, hogy miféle mátrix írja le a fenti IP feladatot. Az $x(e) \le 1$ felső korlátokért egy egységmátrix felel, a 2 jobboldalú egyenlőtlenségekhez pedig epp a G illeszkedési mátrixa tartozik. (Ennek azért érdemes utánagondolni.) Mivel a páros gráf illeszkedési mátrixa TU, és ezt egységvektor-sorokkal bővítettük, az IP probléma mátrixa TU tulajdonságú. (Ha G nem lenne páros, akkor ez nem lenne igaz, ahogy a gondolatmenet további része sem állna.) Ráadásul a jobboldalon álló konstansok is egészek, ezért a TU mátrixokról tanultak miatt az egészértékűségről szóló kikötések elhagyásával keletkező LP probléma (az ún. LP-relaxáció) azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az LP optimális megoldásai között van olyan is, amelyikben minden változó egész értéket vesz fel. Az LP duálisának felírásához megint szamárvezetőt rajzolunk.

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & E & \\
 & & x_1 \geq 0 \quad \dots \quad x_n \geq 0 & \\
\hline
E & y \geq 0 & I & \leq 1 \\
\hline
V & z & B(G) & = 2 \\
\hline
 & & \geq & \\
 & & c &
\end{array}$$

Az éleknek megfelelő egyenlőtlenségeknek a nemnegatív y változók, a csúcsokhoz tartozó egyenlőségeknek az előjelkötetlen z-k felelnek meg. Az x-ek nemnegatívak, ezért a duálfeltételek egyenlőtlenségek.

$\min\{\tilde{y}(E) + 2 \cdot \tilde{z}(V)\}$
ha $y \geq 0$
$y(e) + z(u) + z(v) \geq c(e)$
minden $e = uv$ élre

2. **a)** Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van megoldása, de nincs egészértékű megoldása?
b) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van egészértékű megoldása, de az optimumot nem veszi fel egészértékű megoldáson?

Megoldás: **a)** Van: $x \leq 1, x \in \mathbb{Z}$, max $\frac{1}{2}x$ (az együtthatómátrix az 1×1-es egységmátrix, ami persze TU). Ennek és LP relaxáltjának persze $x = 1$ optimális megoldása. A DLP $y \geq 0$, $y = \frac{1}{2}$, $\min y$ alakú, melynek van megoldása, de nincs egész megoldása.
b) Ilyen is van: $x \geq 0, x \leq 1, x \in \mathbb{Z}$, max $\frac{1}{2}x$. Ennek És LP relaxáltjának persze $x = 1$ optimális megoldása. A DLP ≥ 0, $y \geq \frac{1}{2}$, $\min y$ alakú, melynek a célfüggvényt minimalizáló egész megoldása $y = 1$, és erre a célfüggvény értéke 1, de a DLP optimuma $\frac{1}{2}$.

3. Vezessük le Egerváry tételét (páros gráfok max súlyú teljes párosításairól és minimális összsúlyú súlyozott lefogásairól) az LP dualitástételből és a TU mátrixokról tanultakból.

4. Mutassuk meg, hogy ha A TU mátrix, akkor a tanult ötféle művelet eredményeképpen valóban TU mátrixot kapunk.

5. Tegyük föl, hogy A TU. TU marad-e, ha...
a) ... hozzáveszünk egy csupa 0 sort vagy oszlopot?
b) ... hozzáveszünk egy csupa 1 sort vagy oszlopot?
c) ... hozzávesszük az A néhány olyan sorának az összegét, ahol az összegvektorban csak 0 vagy ± 1 elemek szerepelnek?

Megoldás: **a)** Igaz (ha az új sor (néhány eleme) szerepel egy $k \times k$-as részmátrixban, akkor nullsort ad benne, így a részmátrix determinánsa nulla lesz; ha meg nem szerepel benne, akkor az eredeti mátrix TU volta miatt 0 vagy ± 1.
b) és **c)** hamisak, mindkettőre ellenpélda a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix (ez TU, ugye?), ugyanis utolsó két sorának összege $(1,1)$, ezt a csupa egy sort hozzáadva az első és utolsó két sor alkotta részmátrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ennek determinánsa 2.

6. **a)** Mutassuk meg, hogy ha G k-szorosan élösszefüggő (azaz $\lambda(G) \geq k$), akkor G-ben minden csúcs foka legalább k.
b) Mutassunk olyan gráfot, ahol minden csúcs foka legalább k, de a gráf nem k-szorosan élösszefüggő.

Megoldás: **a)** Tetszőleges v csúcsra a v-ből induló éleket elhagyva izolált csúcs keletkezik, tehát a kapott gráf nem öszefüggő, így $d(v)$ (v fokszáma) darab él már alkothat vágást; tehát $k = \lambda(G) \leq d(v)$.
b) Ez a feltétel még az összefüggőséget sem tudja önmagában garantálni, vegyünk például egy két komponensű gráfot, ahol mindkét komponens $k+1$ csúcsú teljes gráf. Így minden fokszáma k, de nem is összefüggő, nemhogy k-élöf volna.

7. Legyen F egy legalább két pontú fa.
a) Mennyi $\lambda(F)$?
b) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy megnőjön az élösszefüggőségi szám?

Megoldás: **a)** Egy, mert van levele (azaz elsőfokú csúcsa), az arra illeszkedő egyetlen élt törölve szétesik a fa. 0 él törlése persze nem elegendő, mert a fa összefüggő.

b) Ha k levele van, akkor $\lceil k/2 \lceil$. Ennyi nyilván kell, mert kevesebb új él nem tudja lefedni az összes levelet, így maradna elsőfokú csúcs. Ennyi elég: úgy huzzuk be az új éleket, hogy $\lfloor k/2 \rfloor$ közülük két-két levelet kössön össze, az esetleges kimaradó egy levelet pedig valami korábbi levéllel, és emellett a behúzott élek végpontjainak F-beli távolságainak összege legyen maximális. (Az x és y csúcsok távolsága F-ben (jelölje $d_F(x,y)$) az x és y csúcsok közti (egyetlen) F-beli út hossza, azaz élszáma[1].) Jelölje a kapott gráfot G. Ha G-ben volna elvágó $e = ab$ él, az éle kell legyen F-nek (különben elhagyva G-ből az F feszítő fa lenne a maradékban), és persze F-ben is elvágó él volna. $F - e$ (és $G - e$) két komponensét jelölje A és B, ahol $a \in A$, $b \in B$. Ekkor F-nek A-ban és B-ben is van legalább egy-egy egy fokú csúcsa, $u \in A$ és $v \in B$, és az új élek behúzása során u-t egy A-beli u', v-t B-beli v' csúccsal kötöttük össze (hiszen e-n kívül nincs G-nek más éle A és B közt). Vegyük észre, hogy $d_F(u,u') \leq d_F(u,a) + d_F(a,u')$ (hiszen egy ua és egy au' út összefűzése uu' séta), és ugyanígy $d_F(v,v') \leq d_F(v,b) + d_F(v',b)$. Ugyanekkor $d_F(u,v) = d_F(u,a) + 1 + d_F(b,v)$, hiszen az ua út, ab, és a bv út összefűzése uv út; hasonlóan $d_F(u',v') = d_F(u',a) + d_F(v',b) + 1$. Node ekkor a behúzott uu', vv' éleket lecserélve G-ben az uv, $u'v'$ élekre, a végpontok össztávolsága legalább kettővel nőne (hiszen $d_F(u,v) + d_F(u',v') = d_F(u,a) + d_F(b,v) + d_F(u',a) + d_F(v',b) + 2 \geq d_F(u,u') + d_F(v,v')$), ami ellentmond a behúzott éleink kiválasztásának.

8. Legyen G egy körmentes gráf.
a) Legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy összefüggő legyen?
b) És legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy kétszeresen összefüggő legyen?

Megoldás: **a)** Egy új él behúzása két komponenst tud „összeolvasztani”, tehát egy élt behúzva eggyel tud csökkenni a komponensek száma. Ha tehát 1 komponens kell maradjon, $k - 1$ élt kell behúznunk legalább (és ennyit elég is).
b) Itt most jobban kell figyelni: a levelek és az izolált csúcsok száma fontos nekünk, nem közvetlenül a komponenseké (ha egy komponens nem izolált csúcs, akkor úgyis van benne legalább két levél)). Ha ℓ levele és ℓ' izolált csúcsa van, akkor $\lceil (2\ell' + \ell)/2 \rceil$ él behúzása kell szükséges (hiszen minden csúcs fokszámát legalább kettőre kell növelni, és egy új él két csúcs fokszámát növeli). Ennyi elegendő is: először tegyük összefüggővé a gráfot úgy, hogy minden új él különböző komponensekben levő levelek / izolált csúcsok közé kerüljön; így egy fát fogunk kapni. Ha k komponens volt, akkor $k - 1$ új élt húztunk be így, és minden lépésben eggyel csökken a kérdéses mennyiség (az új élt levélhez kötve az megszűnik levélnek lenni, izolált csúcshoz kötve pedig abból levél lesz, tehát a számláló mindig pontosan kettővel csökken). A kapott fában izolált csúcs nincs; ha a levelek száma L, akkor a korábbi feladat szerint $\lceil L/2 \rceil$ további új él behúzásával 2-élöffé tehető, másrészt az első $k - 1$ behúzásával a vizsgált mennyiség változása éppen $\lceil (2\ell' + \ell)/2 \rceil - (k - 1) = \lceil L/2 \rceil$, tehát $\lceil (2\ell' + \ell)/2 \rceil$ él behúzása valóban elegendő.

9. Legyenek a G gráf csúcsai a 8×8-as sakktábla mezői, és pontosan akkor kössön össze él két csúcsot, ha a megfelelő mezők élszomszédosak.
a) Határozzuk meg $\lambda(G)$ értékét.
b) Mennyi $\lambda(A1,H8)$, $\lambda(A2,H7)$, $\lambda(B4,H4)$?
c) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy $\lambda(G)$ eggyel megnőjön?

10. **a)** Adjunk hatékony eljárást egy irányítatlan gráfban tetszőeges $u \neq v$ csúcsok esetén a $\lambda(u,v)$ meghatározására.
b) Adjunk hatékony eljárást irányítatlan G gráf esetén $\lambda(G)$ meghatározására.

[1]Megjegyzés: fában csak egy xy út van bármely x, y csúcsokra, de általános gráfban lehet több is; ilyenkor a két csúcs távolsága az őket összekötő legrövidebb út hossza.