Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

8. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Definíció. *Egészprogramozási feladatnak (IP)* egy olyan LP vagy DLP feladatot hívunk, ahol további megkötés, hogy a változóknak egész értéket kellfelvenniük, sztenderd alakban $\max cx\colon Ax \le b, x \in \mathbb{Z}^n$. Egy IP feladat **LP relaxáltját** úgy kapjuk, ha az egészértékűségi feltételeket elhagyjuk az IP-ből (azaz megengedünk megoldásokat $x \in \mathbb{R}^n$-ből is). Ha LP és DLP duális feladatpár, akkor az x és y-beli változózók egészértékűségét megkívánva kapjuk az IP és DIP egészprogramozási feladatokat.
Megfigyelés. Ha LP egy $\max cx$, DLP pedig egy $\min yb$ típusú feladat és mindkettőnek van megoldása, akkor a megfelelő egészprogramozási feladatokra teljesül, hogy

$$\max_{IP} cx \le \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \le \min_{DIP} yb$$

Cél: olyan feltétel, ami biztosítja, hogy a fenti egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség álljon.
Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix *teljesen unimoduláris (TU)*, ha A bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1.
Megfigyelés. TU mátrix minden eleme 0 vagy ± 1.
Állítás. Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha (1) transzponáljuk, (2) valamely sorát/oszlopát (-1)-gyel végigszorozzuk, (3) valamely sorát/oszlopát megismételjük/töröljük, (4) két sorát/oszlopát felcseréljük, (5) A-t egy 1 db 1-esen kívül csupa 0-kat tartalmazó sorral/oszloppal bővítjük.
Tétel. Tfh A TU mátrix és a b vektor koordinátái egészek. Ekkor a $\max cx\colon Ax \le b, x \in \mathbb{Z}^n$ IP feladatra és LP relaxáltjára $\max_{IP} cx = \max_{LP} cx$ teljesül. Ha pedig A TU és c egész, akkor a DIP-re és relaxáltjára (DLP) teljesül, hogy $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$. Szavakban: TU együtthatómátrix és egész konstansok (ill. célfvegyütthatók) esetén ha az LP-nek (ill. a DLP-nek) van optimuma, akkor az optimumérték egész változókkal megadható megoldáson is felvétetik, vagyis az egészértékűségi megszorítás nem ront az optimum értékén.
Definíció. A $G = (V,E)$ irányított gráf $B(G)$ *illeszkedési mátrixának* (avagy incidenciamátrixának) sorai V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és a v csúcs és e él által meghatározott (v,e) pozícióban 1 áll, ha e a v-ből kilép, -1, ha belép, és 0, ha v nem végpontja e-nek. Irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa hasonló: ha v végpontja e-nek, akkor 1 áll, ha nem akkor 0.
Állítás. Ha G irányított gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrixa TU tulajdonságú.
Következmény. Ha G páros gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrix TU.

Gyakorlatok

1. Egy $G = (V,E)$ gráf *2-faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c: E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

2. a) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van megoldása, de nincs egészértékű megoldása?
b) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van egészértékű megoldása, de az optimumot nem veszi fel egészértékű megoldáson?

3. Vezessük le Egerváry tételét (páros gráfok max súlyú teljes párosításairól és minimális összsúlyú súlyozott lefogásairól) az LP dualitástételből és a TU mátrixokról tanultakból.

4. Mutassuk meg, hogy ha A TU mátrix, akkor a tanult ötféle művelet eredményeképpen valóban TU mátrixot kapunk.

5. Tegyük föl, hogy A TU. TU marad-e, ha...
a) ... hozzáveszünk egy csupa 0 sort vagy oszlopot?
b) ... hozzáveszünk egy csupa 1 sort vagy oszlopot?
c) ... hozzávesszük az A néhány olyan sorának az összegét, ahol az összegvektorban csak 0 vagy ± 1 elemek szerepelnek?

6. a) Mutassuk meg, hogy ha G k-szorosan élösszefüggő (azaz $\lambda(G) \ge k$), akkor G-ben minden csúcs foka legalább k.
b) Mutassunk olyan gráfot, ahol minden csúcs foka legalább k, de a gráf nem k-szorosan élösszefüggő.

7. Legyen F egy legalább két pontú fa.
a) Mennyi $\lambda(F)$?
b) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy megnőjön az elösszefüggőségi szám?

8. Legyen G egy körmentes gráf.
a) Legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy összefüggő legyen?
b) És legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy kétszeresen összefüggő legyen?

9. Legyenek a G gráf csúcsai a 8×8-as sakktábla mezői, és pontosan akkor kössön össze él két csúcsot, ha a megfelelő mezők élszomszédosak.
a) Határozzuk meg $\lambda(G)$ értékét.
b) Mennyi $\lambda(A1, H8)$, $\lambda(A2, H7)$, $\lambda(B4, H4)$?
c) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy $\lambda(G)$ eggyel megnőjön?

10. a) Adjunk hatékony eljárást egy irányítatlan gráfban tetszőeges $u \neq v$ csúcsok esetén a $\lambda(u, v)$ meghatározására.
b) Adjunk hatékony eljárást irányítatlan G gráf esetén $\lambda(G)$ meghatározására.