# Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

7. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (`heger@cs.bme.hu`)

## Tudnivalók

**Definíció:** Egy LP feladat *általánosabb sztenderd alakú*, ha a feltételrendszere egyenlőségekből, egyenlőtlenségekből és nemnegativitási feltételekből áll, továbbá minimalizálás esetén minden egyenlőtlenség $\geq$, maximalizáláskor pedig $\leq$ alakú (ide nem értve a nemnegativitási feltételeket).

**Definíció:** Az LP-vel jelölt $\max\{cx: \ Ax \leq b\}$ primál feladat *duálisa* a DLP-vel jelölt $\min\{yb: \ y \geq 0 \ yA = c\}$ lineáris programozási feladat.

**Dualitástétel.** Tetszőleges $\max cx$ típusú LP feladatra és $\min yb$ típusú DLP duálisára az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül.

(1) Sem az LP, sem a DLP nem megoldható.

(2) Az LP nem megoldható, a DLP igen, és a DLP megoldásain az $yb$ célfüggvényérték alulról nem korlátos.

(3) A DLP nem megoldható az LP igen, és az LP megoldásain a $cx$ célfüggvényérték felülről nem korlátos.

(4) Az LP és a DLP is megoldható, és az optimumértékek azonosak:

$$\max\{cx : x \text{ az LP megoldása}\} = \min\{yb : y \text{ a DLP megoldása}\}.$$

**Következmény:** (1) Ha $x$ és $y$ a fenti LP ill DLP megoldásai, akkor $cx \leq yb$.

(2) (Optimalitási kritérium) Ha a fenti LP ill. DLP feladatok $x$ ill. $y$ megoldásaira $cx = yb$ teljesül, akkor $x$ a primál LP, $y$ pedig a duál DLP optimális megoldásai.

**Megjegyzés:** LP/DLP feladat duálisa az alábbi ökölszabályok segítségével képezhető.

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.

(1) A feladatokat általánosabb sztenderd alakban írjuk fel.

(2) Az LP, ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.

(3) Duál változókhoz primál feltételek, duál feltételekhez primál változók tartoznak, és viszont.

(4) Nemnegatív változóhoz egyenlőtlenség, előjelkötetlen változóhoz egyenlőség tartozik.

(5) A primál célfv együtthatói a duál konstansok, a duál célfv együtthatói pedig a primál konstansok.

(6) Az ezen szabályokkal képzett primál/duál feladat is sztenderd alakú.

**Definíció:** Egy LP feladat **egészértékű programozási feladat (IP)**, ha a megoldásoktól $x \in \mathbb{R}^n$ helyett $x \in \mathbb{Z}^n$-et követelünk meg, azaz a megoldásokban csak egész számok szerepelhetnek. Formalizálva $\max\{cx\colon Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$.

## Gyakorlatok

**1.** Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}
&\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1\\
&x_1 + x_3 + 5x_4 = 1\\
&x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

*Megoldás:* Először átírjuk sztenderd alakba a feladatot. Mivel minimalizálunk, ezért csak $\geq$ ill $=$ típusú feltételeink lehetnek, azaz az utolsó feltétel $-x_2 \geq 0$ alakot ölt. Ezek után szamárvezetőt készítünk. Mivel az LP-ben minimalizálunk, a DLP-ben maximalizálni kell, tehát a lineáris feltételeink $=$ és $\leq$ típusúak lehetnek.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \geq 1\\
y_2 & 1 & 0 & 1 & 5 & = 1\\
y_3 \geq 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \geq 0\\
\hline
 & = & = & = & = & \\
 & 1 & -2 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Az $y_1, y_2, y_3$ duális változók a három primálfeltételhez tartoznak. Mivel az első és a harmadik primálfeltétel egyenlőtlenség, ezért az $y_1$ és az $y_3$ változókra nemnegativitási feltétel van.

$$\begin{aligned}
&\max\{y_1 + y_2\}\\
&\text{ha } y_1, y_3 \geq 0\\
&y_1 + y_2 = 1\\
&2y_1 - y_3 = -2\\
&y_1 + y_2 = 0\\
&y_1 + 5y_2 = 1
\end{aligned}$$

Az $x_i$-k egyikére sincs nemnegativitás, ezért mind a négy hozzájuk tartozó duálfeltétel egyenlőséggel fog állni. A keresett DLP tehát odafenn a jobboldalon látható.

Nem volt kérdés ugyan, de látszik, hogy a DLP-beli első és harmadik feltétel ellentmond egymásnak, ezért a DLP-nek nincs megoldása. Ennek megfelelően (szintén nem volt kérdés, de megfigyeljük), hogy az LP-ben a célfüggvényérték nem korlátos, azaz tetszőlegesen kicsi lehet, így minimum sem létezik.

**2.** **a)** Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?

**b)** Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$$\max\{2x_1+3x_2+4x_3+5x_4\}$$
ha
$$x_1+2x_2+x_3\le 5$$
$$x_2+2x_4\le 6$$
$$x_1+x_3+x_4\le 7$$
$$2x_2+3x_4\le 8$$

*Megoldás:* **a)** Szerencsére sztenderd alakban van az LP megadva, nem kell kínlódni az ilyen alakra hozással. Lássunk neki a szamárvezetőnek!

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline y_1\ge 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \le 5 \\ y_2\ge 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \le 6 \\ y_3\ge 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \le 7 \\ y_4\ge 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & \le 8 \\ \hline & = & = & = & = & \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív, az $x$-ekre viszont nincs előjelmegkötés, ezért minden duálfeltétel egyenlőség. Jobbra látható a duális

$$\min\{5y_1+6y_2+7y_3+8y_4\}$$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \ge 0$
$$y_1+y_3=2$$
$$2y_1+y_2+2y_4=-3$$
$$y_1+y_3=4$$
$$2y_2+y_3+3y_4=5$$

**b)** A dualitástétel szerint primál célfüggvény pontosan akkor korlátos a megoldások halmazán, ha a DLP megoldható. Márpedig az első és a harmadik duálfeltétel ellentmond egymásnak. Ezért a DLP-nek nincs megoldása, vagyis az LP célfüggvényérték nem korlátos.

**3. a)** Mi a duálisa az alábbi LP feladatnak? (Figyelem! A gyakorlaton kiosztotthoz képest belekerült egy új, $x_1\ge 0$ nemnegativitási feltétel is.)
**b)** Mutassuk meg, hogy az $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1=4$, $y_2=2$, $y_3=3$, $y_4=0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$$\max\{17x_1+17x_2+17x_3\}$$
ha
$$x_1\ge 0$$
$$x_1+2x_2+3x_3\le 1$$
$$2x_1+3x_2+x_3\le 3$$
$$3x_1+x_2+x_3\le 8$$
$$2x_1+5x_2\le 2$$

*Megoldás:* **a)** Ismét szerencsések vagyunk a sztenderd alakkal, veselkedjünk neki a szamárvezetőnek! Mivel az LP-ben maximalizálunk, a DLP-ben minimalizálni kell, tehát a lineáris feltételeink $=$ és $\ge$ típusúak lehetnek.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \ge 0 & & & \\ & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline y_1\ge 0 & 1 & 2 & 3 & \le 1 \\ y_2\ge 0 & 2 & 3 & 1 & \le 3 \\ y_3\ge 0 & 3 & 1 & 1 & \le 8 \\ y_4\ge 0 & 0 & 2 & 5 & \le 2 \\ \hline & \ge & = & = & \\ & 17 & 17 & 17 & \end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív, az $x_1$-re van előjelmegkötés, tehát az első duálfeltételben egyenlőtlenség, mégpedig $\ge$ áll (hiszen a DLP-ben minimalizálunk); a többi primál változónál viszont nincs előjelmegkötés, ezért minden más duálfeltétel egyenlőség. Jobbra látható a duális.

$$\min\{y_1+3y_2+8y_3+2y_4\}$$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \ge 0$
$$y_1+2y_2+3y_3\ge 17$$
$$2y_1+3y_2+y_3+2y_4=17$$
$$3y_1+y_2+y_3+5y_4=17$$

**b)** Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy az LP ill. a DLP egy-egy megoldásáról beszélünk, azaz mind az LP, mind a DLP-ben szereplő feltételek teljesülnek az két értékadásra. Számítsuk ki a megfelelő célfüggvényértékeket is: $17\cdot 3+17\cdot(-1)+17\cdot 0=34=1\cdot 4+3\cdot 2+8\cdot 3+2\cdot 0$. Tudjuk, hogy ha az LP egy maximalizálás, akkor bármely LP megoldás célfüggvényértéke legfeljebb annyi mint bármely DLP megoldás célfüggvényértéke. Tehát bármely DLP célfüggvényérték legalább 34 az LP megoldás alapján, és bármely LP célfüggvényérték legfeljebb 34 a DLP megoldás miatt. Ezért a megadott LP megoldás maximalizálja az LP célfüggvényét, és a közölt DLP megoldás pedig minimalizálja a DLP-ét. Más szóval: optimális megoldásokról van szó.

**4. a)** Írjuk fel az alábbi ($n$ változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)

**b)** Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

$$
\begin{aligned}
&\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 \le 1\\
&x_1 + x_2 \le 2\\
&x_1 + x_2 + x_3 \le 3\\
&\vdots\\
&x_1 + x_2 + \dots + x_n \le n\\
&x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

*Megoldás:* **a)** Advanced level: nem egy konkrét mátrixról van szó. Sebaj, rajzoljuk csak fel a szamárvezetőt.

$$
\begin{array}{cccc}
 & x_1 \ge 0 \quad \dots \quad x_n \ge 0 & \\
y_1 \ge 0 & \multirow{3}{*}{$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{matrix}}$} & \le 1 \\
\vdots & & \vdots \\
y_n \ge 0 & & \le n \\
 & \ge \quad \dots \quad \ge & \\
 & n \quad \dots \quad 1 &
\end{array}
$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív. Az $x$-ek nemnegatívak, ezért minden duálfeltétel egyenlőtlenség. Jobbra látható a duális.

$$
\begin{aligned}
&\min\{y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n\}\\
&\text{ha } y_1, y_2, \dots, y_n \ge 0\\
&y_1 + y_2 \ldots + y_n \ge n\\
&\vdots\\
&y_1 + y_2 \ge 2\\
&y_1 \ge 1
\end{aligned}
$$

**b)** Az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ megoldása az LP-nek, és a hozzá tartozó célfüggvényérték $n + (n-1) + \ldots + 1 = \binom{n+1}{2}$. Vegyük észre, hogy az $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ pedig a DLP megoldása, és a hozzá tartozó célfv érték $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$. Mivel a két célfüggvényérték megegyezik, ezért az előző feladatban kifejtett gondolatmenet miatt mindkét megoldás optimális az adott problémára.

**5.** Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a $G$-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek, ill. a maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását.

*Megoldás:* Maximális klikk keresésekor minden egyes csúcsokról döntést kell hoznunk, hogy kiválasztjuk-e vagy sem, tehát csúcsokhoz fogunk változókat rendelni: minden $v \in V$ csúcsra $x(v)$ egy változó, és $x(v)$ akkor lesz 1, ha $v$ benne van a megoldás klikkben, egyébként 0. Mivel azt szeretnénk, hogy a változóink csak 0 vagy 1 értéket vegyenek föl, megköveteljük az alábbi feltételeket:

$$
\begin{array}{lll}
\forall v \in V: & x(v) \ge 0 & \text{(nemnegativitás)}\\
\forall v \in V: & x(v) \le 1 & \text{(lineáris feltétel)}\\
\forall v \in V: & x(v) \in \mathbb{Z} & \text{(egészértékűségi feltétel)}
\end{array}
$$

A kiválasztott csúcsok klikket kell alkossanak, tehát ha két csúcs közt nem fut él, akkor nem választhajuk ki mindkettőt. Emiatt az összes nemszomszédos $u$, $v$ csúcspárra megkötjük, hogy nem választhatjuk ki mindkettőt:

$$\forall u \ne v \in V, uv \notin E: \quad x(v) + x(u) \le 1 \quad \text{(lineáris feltétel)}$$

A rendszerünk tetszőleges megoldására $\{v \in V : x(v) = 1\}$ a $G$ gráf egy klikkjét alkotja, és fordítva, ha a $H \subset V$ csúcshalmaz klikket alkot $G$-ben, akkor az $x(v) = 1$, ha $v \in H$, $x(v) = 0$, ha $v \notin H$ értékadás megoldást ad, tehát sikerült megfelelő IP-t felírni. Egy megoldásnak megfelelő klikk mérete éppen $\sum_{v \in V} x(v)$. Mivel a célunk a klikkben szereplő csúcsok számának maximalizálása, az IP célfüggvénye $\max \sum_{v \in V} x(v)$.
A maximális független ponthalmaz voltaképp a komplementergráf klikkje. Ezért minden szó szerint működik az előző megoldásból azzal, hogy az utolsó feltétel megváltozik: nem azt kívánjuk, hogy bármely két nem szomszédos csúcs közül legfeljebb egy tartozhat a szóban forgó $U$ halmazhoz, hanem azt, hogy bármely két *szomszédos* csúcsra legyen ez így: $x(u) + x(v) \le 1$ teljesül $G$ bármely $uv$ élére.

**6.** Pirézíában besúgóhálózatot építenek ki a megbízhatónak gondolt célszemélyek beszervezésével. A cél, hogy minden város lakosai között legyen legalább 66 ügynök, ám nem dolgozhat a hálózatban 3-nál több tagja egyetlen családnak sem. Mindezt a lehető legkisebb hálózat kiépítésével szeretnék elérni.
Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, kiket kell beszervezni a cél elérése érdekében: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt. (Ismertnek tekinthetjük Pirézia lakosainak, városainak és családjainak $P$, $V$, illetve $CS$ halmazát, ahol $V$ és $CS$ elemei az adott város lakóiból, illetve család tagjaiból álló halmazok.)

*Megoldás:* Vezessünk be minden potenciális ügynökhöz egy-egy változót, az $x(p)$ a $p$ személyhez tartozó változó. A beszervezendó emberek halmazának karakterisztikus vektoraként szeretnénk megtalálni a megoldást (azaz a beszervezendő embereknek megfelelő $x(p)$ változó, avagy koordináta, 1 legyen, a többieké 0), ehhez keressük a célfüggvényt és

a feltételeket. Egy ilyen karakterisztikus vektorhoz könnyű meghatározni a célfüggvényt: az összes változó összegét, azaz a $\sum_{p\in P} x(p)$ mennyiséget akarjuk minimalizálni, ahol $P$ jelöli Pirézia beszervezhető lakóinak halmazát.
A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(p)$ váltózóhoz tartozik a $0 \leq x(p)$ nemnegativitási és az $x(p) \leq 1$ lineáris feltétel, valamint egy $x(p) \in \mathbb{Z}$ egészértékűségi megkötés.
A 66 városi ügynökre vonatkozó kritérium is lefordítható lineáris feltételre: minden $V$ városhoz tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a $V$ lakosaihoz tartozó változók összegének legalább 66: $\sum_{p\in V} x(p) \geq 66$.
Ezen kívül minden $C$ családhoz is tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a $C$ család tagjaihoz tartozó változók összege legfeljebb 3: $\sum_{p\in C} x(p) \leq 3$.
A kapott ILP megoldásai a feltételeknek megfelelő beszervezések, a célfüggvényt optimalizáló egész megoldás pedig megadja, hogy konkrétan kik a beszervezési kampány célszemélyei.

**7.** Piréziában az emberek kétfélék: minden polgár vagy oltásszkeptikus vagy oltáshívő. A kormány az átoltottság mihamarabbi elérésének érdekében úgy szeretné levezényelni az oltáskampányt, hogy minden oltásszkeptikusnak legalább 13 oltáshívő facebook-ismerősét beoltsák. (Az oltásszkeptikusok rendkívül aktívak a szociális médiában, mindegyiküknek száz feletti fb-ismerőse van, ezek legalább fele oltáshívő.) Sajnos az oltóanyag csak szűkösen áll rendelkezésre. Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, hogyan lehet minimális számú ember beoltásával elérni a kitűzött célt: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.
(A kormány természetesen mindenkiről tudja, melyik csoportba tartozik és kik is a fb-ismerősei.)

**8.** Adott $G = (V,E)$ irányított gráf, $s,t \in V$ csúcsok és $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény esetén írjuk fel IP (vagy LP) feladatként a legrövidebb $st$-út meghatározását.

*Megoldás:* Jelölje $x(v) = dist_\ell(s,v)$ az $\ell$ hosszfv szerint legrövidebb $sv$-út hosszát. A cél az $x(t)$ meghatározása. Ha $uv \in E(G)$ egy él, akkor $s$-ből el lehet jutni $v$-be úgy, hogy egy legrövidebb $su$-utat meghosszabbítunk az $uv$ éllel. A legrövidebb $sv$-út ennél az útnál nem lehet hosszabb, azaz teljesül, hogy $x(v) \leq x(u) + \ell(uv)$. Tekintsük azt az LP feladatot, amiben $x(s) = 0$ mellett minden $uv \in E$ élre megkívánjuk az iménti feltétel teljesülését. Ennek a feladatnak $x(v) = dist_\ell(s,v) \forall v$ egy megoldása. Igaz továbbá, hogy ha $s, v_1, v_2, \ldots, v$ egy legrövidebb $sv$-út, akkor
$dist_\ell(s,v) = \ell(sv_1) + \ell(v_1v_2) + \ldots = x(s) + \ell(sv_1) + \ell(v_1v_2) + \ldots \geq x(v_1) + \ell(v_1v_2) + \ldots \geq x(v_2) + \ldots \geq \ldots \geq x(v)$,
tehát az LP bármely megoldására és $G$ bármely $v$ csúcsára teljesül, hogy $x(v) \leq dist(s,v)$, és az LP-nek van olyan megoldása, amire $x(v) = dist(s,v)$. Ezért ha a célfüggvényt $\max x(t)$-nek választjuk, akkor az optimum éppen a $dist(st)$ érték lesz.
Hurrá: nem is kellett IP, elég volt az LP.

**9.** Adott $G = (V,E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosítás feladatát IP feladatként. Tekintsük a feladat LP relaxációját is (ahol egész helyett valós számokat is megengedünk a megoldásban). Igaz-e, hogy tetszőleges $G$ gráfra a célfüggvény maximuma az IP és az LP relaxáció esetén egybeesik?

**10.** Egy sakktáblára szeretnénk minél kevesebb huszárt (lovat) föltenni úgy, hogy a tábla minden mezőjét legalább az egyik huszár támadja. Írjunk föl olyan LP vagy IP feladatot, melynek megoldásával meghatározható a huszárok minimálisan szükséges száma és egy optimális elrendezés.

*Megoldás:* Legyen $V$ a sakktábla mezőinek halmaza, és minden $v \in V$ mezőre legyen $N(v)$ azon mezők halmaza, melyeket egy huszár $v$-ből támadni tud (ezt minden $v$ mezőre könnyen meghatározható, persze „kézzel" némileg hosszadalmas volna). A sakktábla minden $v$ mezőjéhez rendeljünk egy-egy $x_v$ változót; ez fogja azt jelenteni, hogy a $v$ mezőre teszünk-e huszárt, és ennek megfelelően értéke 0 vagy 1 kell legyen. Feltétel továbbá, hogy minden $v$ mezőt támadjon valamelyik huszár, tehát az $N(v)$-beli mezők közül legalább az egyikre tegyünk egyet. Ennek megfelelően a feltételeink:

$$\begin{aligned} \forall v \in V: x_v &\geq 0 \\ \forall v \in V: x_v &\leq 1 \\ \forall v \in V: x_v &\in \mathbb{Z} \\ \forall v \in V: \textstyle\sum_{u\in N(v)} x_u &\geq 1, \end{aligned}$$

a célfüggvény pedig $\min \sum_{v\in V} x_v$.