Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

7. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Definíció: Egy LP feladat *általánosabb sztenderd alakú*, ha a feltételrendszere egyenlőségekből, egyenlőtlenségekből és nemnegativitási feltételekből áll, továbbá minimalizálás esetén minden egyenlőtlenség $\geq$, maximalizáláskor pedig $\leq$ alakú (ide nem értve a nemnegativitási feltételeket).

Definíció: Az LP-vel jelölt $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$ primál feladat *duálisa* a DLP-vel jelölt $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$ lineáris programozási feladat.

Dualitástétel. Tetszőleges $\max cx$ típusú LP feladatra és $\min yb$ típusú DLP duálisára az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül.

(1) Sem az LP, sem a DLP nem megoldható.

(2) Az LP nem megoldható, a DLP igen, és a DLP megoldásain az yb célfüggvényérték alulról nem korlátos.

(3) A DLP nem megoldható az LP igen, és az LP megoldásain a cx célfüggvényérték felülről nem korlátos.

(4) Az LP és a DLP is megoldható, és az optimumértékek azonosak:

$$\max\{cx : x \text{ az LP megoldása}\} = \min\{yb : y \text{ a DLP megoldása}\}.$$

Következmény: (1) Ha x és y a fenti LP ill DLP megoldásai, akkor $cx \leq yb$.

(2) (Optimalitási kritérium) Ha a fenti LP ill. DLP feladatok x ill. y megoldásaira $cx = yb$ teljesül, akkor x a primál LP, y pedig a duál DLP optimális megoldásai.

Megjegyzés: LP/DLP feladat duálisa az alábbi ökölszabályok segítségével képezhető.

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.

(1) A feladatokat általánosabb sztenderd alakban írjuk fel.

(2) Az LP, ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.

(3) Duál változókhoz primál feltételek, duál feltételekhez primál változók tartoznak, és viszont.

(4) Nemnegatív változóhoz egyenlőtlenség, előjelkötetlen változóhoz egyenlőség tartozik.

(5) A primál célfv együtthatói a duál konstansok, a duál célfv együtthatói pedig a primál konstansok.

(6) Az ezen szabályokkal képzett primál/duál feladat is sztenderd alakú.

Definíció: Egy LP feladat **egészértékű programozási feladat (IP)**, ha a megoldásoktól $x \in \mathbb{R}^n$ helyett $x \in \mathbb{Z}^n$-et követelünk meg, azaz a megoldásokban csak egész számok szerepelhetnek. Formalizálva $\max\{cx \colon Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$.

Gyakorlatok

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}
&\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1\\
&x_1 + x_3 + 5x_4 = 1\\
&x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

2. a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?

b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$$\begin{aligned}
&\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5\\
&x_2 + 2x_4 \leq 6\\
&x_1 + x_3 + x_4 \leq 7\\
&2x_2 + 3x_4 \leq 8
\end{aligned}$$

3. a) Mi a duálisa az alábbi LP feladatnak? (Figyelem! A gyakorlaton kiosztotthoz képest belekerült egy új, $x_1 \geq 0$ nemnegativitási feltétel is.)

b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$,

$y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$$\begin{aligned}
&\max\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 \geq 0\\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1\\
&2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3\\
&3x_1 + x_2 + x_3 \leq 8\\
&2x_1 + 5x_2 \leq 2
\end{aligned}$$

4. a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)
b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

$$\begin{aligned}
&\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 \leq 1\\
&x_1 + x_2 \leq 2\\
&x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\\
&\vdots\\
&x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n\\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

5. Adott $G = (V,E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek, ill. a maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását.

6. Pirézíában besúgóhálózatot építenek ki a megbízhatónak gondolt célszemélyek beszervezésével. A cél, hogy minden város lakosai között legyen legalább 66 ügynök, ám nem dolgozhat a hálózatban 3-nál több tagja egyetlen családnak sem. Mindezt a lehető legkisebb hálózat kiépítésével szeretnék elérni.
Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, kiket kell beszervezni a cél elérése érdekében: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt. (Ismertnek tekinthetjük Pirézia lakosainak, városainak és családjainak P, V, illetve CS halmazát, ahol V és CS elemei az adott város lakóiból, illetve család tagjaiból álló halmazok.)

7. Pirézíában az emberek kétfélék: minden polgár vagy oltásszkeptikus vagy oltáshívő. A kormány az átoltottság mihamarabbi elérésének érdekében úgy szeretné levezényelni az oltáskampányt, hogy minden oltásszkeptikusnak legalább 13 oltáshívő facebook-ismerősét beoltsák. (Az oltásszkeptikusok rendkívül aktívak a szociális médiában, mindegyiküknek száz feletti fb-ismerőse van, ezek legalább fele oltáshívő.) Sajnos az oltóanyag csak szűkösen áll rendelkezésre.
Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, hogyan lehet minimális számú ember beoltásával elérni a kitűzött célt: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.
(A kormány természetesen mindenkiről tudja, melyik csoportba tartozik és kik is a fb-ismerősei.)

8. Adott $G = (V,E)$ irányított gráf, $s,t \in V$ csúcsok és $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény esetén írjuk fel IP (vagy LP) feladatként a legrövidebb st-út meghatározását.

9. Adott $G = (V,E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosítás feladatát IP feladatként. Tekintsük a feladat LP relaxációját is (ahol egész helyett valós számokat is megengedünk a megoldásban). Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra a célfüggvény maximuma az IP és az LP relaxáció esetén egybeesik?

10. Egy sakktáblára szeretnénk minél kevesebb huszárt (lovat) föltenni úgy, hogy a tábla minden mezőjét legalább az egyik huszár támadja. Írjunk föl olyan LP vagy IP feladatot, melynek megoldásával meghatározható a huszárok minimálisan szükséges száma és egy optimális elrendezés.