Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

6. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Farkas-lemma: $\exists x: \; Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0$. Más szóval: az $Ax \leq b$ és az $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ lineáris rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása.

Definíció: *Lineáris program* (LP) alatt egy lineáris célfüggvény maximalizálását vagy minimalizálását értjük lineáris feltételek (egyenlőségek vagy nem szigorú egyenlőtlenségek) és a változókra vonatkozó esetleges további nemnegativitási feltételek fennállása mellett.

Geometriai interpretáció két változó esetén. Egy $ax+by=c$ egyenlet (x,y) megoldásai a síkon egy ((a,b) normálvektorú) egyenest alkotnak. Egy $ax+by \leq c$ egyenlőtlenség (x,y) megoldásai a síkon az előző egyenes által határolt, zárt félsíkot alkotnak. Néhány egyenlőtlenség közös megoldásai az egyenlőtlenségekhez tartozó félsíkok metszetében levő (x,y) pontok halmaza, ami egy konvex poliéder (ami lehet üres, ha nincs megoldás; és esetleg előfordulhat az is, hogy nem korlátos (végtelenül nagy)). Tegyük föl, hogy egy kétváltozós egyenlőtlenségrendszer olyan (x,y) megoldását keressük, ahol c_1x+c_2y maximális. Azaz, ha P jelöli az egyenlőtlenségrendszer megoldásaiból álló poliédert, akkor olyan $(x,y) \in P$ pontot keresünk, amelyre a lehető legnagyobb a c_1x+c_2y összeg. Azok az (x,y) pontok a síkon, amelyekre a $c_1x+c_2y=p$ valamilyen konstans $p \in \mathbb{R}$-re, egy e egyenest alkotnak. Ráadásul, ha p értékét növeljük / csökkentjük, akkor az egyenes a (c_1,c_2) normálvektor irányában / ellenkező irányban megy át egy párhuzamos egyenesbe). Ha tehát a P konvex sokszögnek a c_1x+c_2y célfüggvényt maximalizáló pontját keressük, akkor az egyenest a normálvektor által mutatott irány szerinti „végtelen távolból” indítva addig kell tolni a P sokszög felé, amíg az eltoltnak közös pontja nem lesz P-vel. (Úgy is mondhatjuk, hogy megkeressük P-nek azt az e-vel párhuzamos *támaszegyenesét*, amitől a (c_1,c_2) normálvektor irányába már nem esik P-nek pontja.) A lineáris egyenlőtlenségrendszernek a c_1x+c_2y célfüggvényt maximalizáló megoldásai az egyenes ezen eltoltjának és P-nek a közös pontjai lesznek. Ezen optimális megoldások halmaza vagy egy csúcsa, vagy egy éle lesz P-nek. Az első esetben pontosan egy, a másodikban pedig pontosan két csúcs lesz optimális megoldás. Az optimum meghatározása innentől egyszerű: P minden csúcsára kiszámítjuk a célfüggvényértéket, és az a csúcs fog maximalizálni, amelyikre a legnagyobb ez a mennyiség. Ha két ilyen csúcs is van, akkor az általuk meghatározott szakasz minden más pontja is optimális megoldás.

Lineáris program sztenderd mátrixos alakja. Az $x_1,\ldots,x_n = x$ változókkal felírt minden lineáris egyenlet, egyenlőtlenség, nemnegativitási feltétel átírható $\leq$ egyenlőtlenségek segítségével, és így $Ax \leq b$ alakba. Lineáris program: a cx célfüggvény értékét akarjuk maximalizálni az $Ax \leq b$ feltételt teljesítő x-eken, azaz a feladat $\max\{cx\colon Ax \leq b\}$. A feladatot vizsgáva két alternatív párt írhatunk föl a Farkas-lemma alapján:

$$\textbf{(I)}\;\; Ax \leq b \;\leftrightsquigarrow\; \textbf{(II)}\;\; y \geq 0,\, yA = 0,\, yb < 0$$
$$\textbf{(A)}\;\; Ax \geq 0,\, cx < 0 \;\leftrightsquigarrow\; \textbf{(B)}\;\; y \geq 0,\, yA = c$$

Mindkét párnak pontosan az egyik tagja oldható meg. Az (I) megoldhatósága az $Ax \leq b$ feltételek kielégíthetőségét jelenti, az (A) megoldhatósága pedig a cx célfüggvény korlátlan növelhetőségét. Tehát a $\max\{cx\colon Ax \leq b\}$ LP megoldható és a célfüggvénye korlátos fölülről $\iff$ az (I) és a (B) rendszereknek van megoldása.

Gyakorlatok

1. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért, a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

Megoldás: Jelölje x, ill. y a készítendő vakond-, ill. nyúlnadrágok számát. A feltételek alapján az alábbi egyenlőtlenségeket kell teljesítenie x-nek és y-nak, melyeket egyszerűsíthetünk is a számolásokat megkönnyítendő:

$$\begin{array}{rrcllrcl}
\text{SZ:} & 6x+12y & \leq & 1800 & \iff & x+2y & \leq & 300 \\
\text{V:} & 8x+4y & \leq & 1400 & \iff & 2x+y & \leq & 350 \\
\text{G:} & x+y & \leq & 200 & & & & \\
\text{nemneg:} & x,y & \geq & 0 & & & &
\end{array}$$

A fenti feltételeket kielégítő (x,y) párok közt kell keresnünk olyat, ami maximalizálja a $10x+12y$ célfüggvényt (bevétel). Ábrázoljuk a síkon a feltételeket kielégítő pontok halmazát. Minden egyenlőtlenség egy félsíkot határoz meg, melyet egy egyenes határol (ahol az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül). A félsíkok P-vel jelölt metszete (egy konvex sokszög (poligon)) lesz a megengedett (x,y) párok halmaza (bár az is előfordulhatna, hogy egy végtelen tartományt kapunk). Számoljuk ki a határoló egyenesek páronkénti metszéspontjait (két egyenletből álló, kétismeretlenes lineáris rendszereket kell megoldani).

	$x=0$	$y=0$	$x+2y=300$	$2x+y=350$	$x+y=200$
$x=0$	–	$(0,0)$	$(0,150)$	$(0,350)$	$(0,200)$
$y=0$		–	$(300,0)$	$(175,0)$	$(200,0)$
$x+2y=300$			–	$(83\frac{1}{3},133\frac{1}{3})$	$(100,100)$
$2x+y=350$				–	$(150,50)$
$x+y=200$					–

A P csúcsai ezek közül pontosan azok, melyek P-ben vannak, azaz teljesítik a többi feltételt is. A nemnegativitással sehol sincs probléma, de néhány metszéspont a jelölt feltétel alapján P-n kívül található, pl $(83\frac{1}{3},133\frac{1}{3})$ megsérti a G: $x+y\le 200$ feltételt. A bent maradó 5 pont a P csúcsai:

	$x=0$	$y=0$	$x+2y=300$	$2x+y=350$	$x+y=200$
$x=0$	–	$(0,0)$	$(0,150)$	¬SZ	¬SZ
$y=0$		–	¬V	$(175,0)$	¬V
$x+2y=300$			–	¬G	$(100,100)$
$2x+y=350$				–	$(150,50)$
$x+y=200$					–

Mivel a célfüggvény maximális értéke az a legnagyobb p paraméter, melyre a $10x+12y=p$ egyenesnek van pontja P-ben, a p maximális értékére ez az egyenes támasztja P-t (egy csúcsában vagy egy élében metszi, de nem lehet rajta P-nek belső pontja), így tartalmazza valamelyik csúcsot. Számoljuk ki a célfüggvény értékét a csúcsokon:

	$(0,0)$	$(0,150)$	$(100,100)$	$(150,50)$	$(175,0)$
$10x+12y$	0	1800	2200	2100	1750

Ez alapján Kisvakondék a maximális, 2200 petákos heti bevételt 100 vakondnadrág és 100 nyúlnadrág készítésével tudják elérni.

2. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális, illetve maximális ára, amely mellett az előző feladatnál kapott előállítási mennyiségek mellett továbbra is maximális bevételt kapunk?
b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha...

(i) ... 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
(ii) ... 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
(iii) ... 130 vakondnadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
(iv) ... 90 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 110 nyulnadrágot?

Megoldás: **a)** Geometriai interpretációval vizsgálva: ha a nyúlnadrágok új ára s, akkor a $(100,100)$ pont akkor lesz továbbra is optimális, ha alkalmas p-re a P tartomány $10x+sy=p$ egyenletű támaszegyenese tartalmazza a $(100,100)$ pontot. Ez akkor fordul elő, ha a $10x+sy=p$ egyenes meredeksége[1] (azaz $-s/10$) a $(100,100)$ csúcsot kimetsző két feltétel (SZ: $x+2y\le 300$ és G: $x+y\le 200$) határegyeneseinek meredekségei (azaz $-\frac{1}{2}$ és -1) közé esik, magyarán $-1\le -10/s\le -\frac{1}{2}$, átrendezve ($-2s$-sel szorozva) $2s\ge 20\ge s$, tehát $10\le s\le 20$.
Közvetlenül is kiszámolhatjuk ugyanezt: a $(100,100)$ pont akkor jelent maximális bevételt s petákos nyúlnadrágár mellett, ha a $10x+sy$ bevétel az $(x,y)=(100,100)$ csúcsra legalább akkora, mint minden más csúcsra. Számoljuk ki a bevételeket:

	$(0,0)$	$(0,150)$	$(100,100)$	$(150,50)$	$(175,0)$
$10x+sy$	0	$150s$	$1000+100s$	$1500+50s$	1750

Felírva a $1000+100s\ge 0$, $1000+100s\ge 150s$, $1000+100s\ge 1500+50s$, $1000+100s\ge 1750$ egyenlőtlenségeket, átrendezve és összefoglalva $10\le s\le 20$ adódik.
b) A kérdés azzal egyenértékű, hogy az adott (x,y) pont rajta lehet-e a P valamely támaszegyenesén, azaz csúcsa-e P-nek, esetleg valamelyik oldalélének belső pontja. A válaszok rendre: igen (csúcs); nem (belső pont: minden

[1]Egy nem függőleges egyenes egyenlete szokásosan $y=mx+b$ alakú, ahol m az egyenes meredeksége.

egyenlőtlenséget szigorú egyenlőtlenséggel teljesít, tehát nincs P határán; máshogyan: a $(120,80)$ pont is P-ben van, és $110\cdot 10+80s < 120\cdot 10+80s$, tehát a $(110,80)$ pontban a célfüggvény értéke semmilyen s-re nem maximális); igen (bár nem csúcs, de rajta van az $x+y=200$ oldalegyenesen a $(100,100)$ és a $(150,50)$ csúcsok közti szakaszon (tehát P élén)); nem (nincs P-ben, mert megsérti a SZ: $x+2y\leq 300$ feltételt).

3. Egy kávépörkölő üzemben alap és prémium minőségű szemes kávét állítanak elő egyféle robusta és kétfajta arabica alapanyag fölhasználásával. A titkos receptúra az alábbi:

		alap	prémium
Hozzávalók aránya	robusta	50%	–
	arabica 1	30%	40%
	arabica 2	20%	60%
	Pörkölési sebesség	1 q/ó	4 q/ó

Három feltétel szab korlátot a termelésnek: a pörkölő maximális üzemideje 18 óra hetente, a csomagolóüzem kapacitása maximum 24 mázsa hetente, és a beszállítónk a második arabica alapanyagból legfeljebb 12 mázsát vállal hetente.
a) Hány mázsa alap, illetve prémium minőségű kávét állítsunk elő a haszon maximalizálása érdekében, ha az alap kávén 20.000, a prémium kávén 30.000. forint hasznunk van mázsánként?
b) A rendelkezésünkre álló forrásokból az üzem kapacitásának bővítését tervezzük. Mibe fektessünk be: a pörkölő üzemidejének növelésébe, vagy a csomagolóüzem kapacitásának bővítésébe?

4. Írjunk föl olyan lineáris programot, ami...
a) ... nem oldható meg.
b) ... megoldható, de a célfüggvénye nem korlátos fölülről.
c) ... megoldható, és a célfüggvénye korlátos fölülről.

5. **a)** Igazoljuk, hogy az ($x\geq 0$, $Ax\leq b$) és az ($y\geq 0$, $yA\geq 0$, $yb<0$) lineáris rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg.
b) Igazoljuk ugyanezt az ($x\geq 0$, $Ax=b$) és az ($yA\geq 0$, $yb<0$) rendszerekre is.

6. Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor nem oldható meg, ha az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix soraiból elő lehet állítani tilos sort (azaz $(0,0,\dots,0|p)$ alakú sort, ahol $p\neq 0$). Ezt egyébként már tanultuk a Gauss-eliminációnál is.

7. Adott egy élsúlyozott teljes páros gráf, a csúcsosztályai $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, az a_ib_j él súlya w_{ij}. Írjunk föl olyan lineáris programot, melyet megoldva megkapjuk a gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását.

Megoldás: Minden a_i csúcshoz vegyünk föl egy x_i, és minden b_j csúcshoz egy y_j változót, ezek tárolják a csúcsok súlyait a súlyozott lefogásban. A lineáris programunk:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i, \text{ ha}$$
$$\forall i \in \{1,2\dots,n\}: x_i \geq 0$$
$$\forall i \in \{1,2\dots,n\}: y_i \geq 0$$
$$\forall i,j \in \{1,2\dots,n\}: x_i + y_j \geq w_{i,j}$$