

# Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

6. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

## Tudnivalók

**Farkas-lemma:**  $\exists x : Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0$ . Más szóval: az  $Ax \leq b$  és az  $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$  lineáris rendszerek közül pontosan az egyiknek van megoldása.

**Definíció:** *Lineáris program* (LP) alatt egy lineáris célfüggvény maximalizálását vagy minimalizálását értjük lineáris feltételek (egyenlőségek vagy nem szigorú egyenlőtlenségek) és a változókra vonatkozó esetleges további nemnegativitási feltételek fennállása mellett.

**Geometriai interpretáció két változó esetén.** Egy  $ax + by = c$  egyenlet  $(x, y)$  megoldásai a síkon egy  $((a, b)$  normálvektorú) egyenest alkotnak. Egy  $ax + by \leq c$  egyenlőtlenség  $(x, y)$  megoldásai a síkon az előző egyenes által határolt, zárt félsíkot alkotnak. Néhány egyenlőtlenség közös megoldásai az egyenlőtlenségekhez tartozó félsíkok metszetében levő  $(x, y)$  pontok halmaza, ami egy konvex poliéder (ami lehet üres, ha nincs megoldás; és esetleg előfordulhat az is, hogy nem korlátos (végtelenül nagy)). Tegyük föl, hogy egy kétváltozós egyenlőtlenségrendszer olyan  $(x, y)$  megoldását keressük, ahol  $c_1x + c_2y$  maximális. Azaz, ha  $P$  jelöli az egyenlőtlenségrendszer megoldásaiból álló poliédert, akkor olyan  $(x, y) \in P$  pontot keresünk, amelyre a lehető legnagyobb a  $c_1x + c_2y$  összeg. Azok az  $(x, y)$  pontok a síkon, amelyekre a  $c_1x + c_2y = p$  valamilyen konstans  $p \in \mathbb{R}$ -re, egy  $e$  egyenest alkotnak. Ráadásul, ha  $p$  értékét növeljük / csökkentjük, akkor az egyenes a  $(c_1, c_2)$  normálvektor irányában / ellenkező irányban megy át egy párhuzamos egyenesbe). Ha tehát a  $P$  konvex sokszögnek a  $c_1x + c_2y$  célfüggvényt maximalizáló pontját keressük, akkor az egyenest a normálvektor által mutatott irány szerinti „végtelen távolból” indítva addig kell tolni a  $P$  sokszög felé, amíg az eltoltunk közös pontja nem lesz  $P$ -vel. (Úgy is mondhatjuk, hogy megkeressük  $P$ -nek azt az  $e$ -vel párhuzamos *támaszegyenesét*, amitől a  $(c_1, c_2)$  normálvektor irányába már nem esik  $P$ -nek pontja.) A lineáris egyenlőtlenségrendszernek a  $c_1x + c_2y$  célfüggvényt maximalizáló megoldásai az egyenes ezen eltoltjának és  $P$ -nek a közös pontjai lesznek. Ezen optimális megoldások halmaza vagy egy csúcsa, vagy egy éle lesz  $P$ -nek. Az első esetben pontosan egy, a másodikban pedig pontosan két csúcs lesz optimális megoldás. Az optimum meghatározása innentől egyszerű:  $P$  minden csúcsára kiszámítjuk a célfüggvényértéket, és az a csúcs fog maximalizálni, amelyekre a legnagyobb ez a mennyiség. Ha két ilyen csúcs is van, akkor az általuk meghatározott szakasz minden más pontja is optimális megoldás.

**Lineáris program sztenderd mátrixos alakja.** Az  $x_1, \dots, x_n = x$  változókkal felírt minden lineáris egyenlet, egyenlőtlenség, nemnegativitási feltétel átírható  $\leq$  egyenlőtlenségek segítségével, és így  $Ax \leq b$  alakba. Lineáris program: a  $cx$  célfüggvény értékét akarjuk maximalizálni az  $Ax \leq b$  feltételt teljesítő  $x$ -eken, azaz a feladat  $\max\{cx : Ax \leq b\}$ . A feladatot vizsgálva két alternatív párt írhatunk föl a Farkas-lemma alapján:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad Ax \leq b &\iff \text{(II)} \quad y \geq 0, yA = 0, yb < 0 \\ \text{(A)} \quad Ax \geq 0, cx < 0 &\iff \text{(B)} \quad y \geq 0, yA = c \end{aligned}$$

Mindkét párnak pontosan az egyik tagja oldható meg. Az (I) megoldhatósága az  $Ax \leq b$  feltételek kielégíthetőségét jelenti, az (A) megoldhatósága pedig a  $cx$  célfüggvény korlátlan növelhetőségét. Tehát a  $\max\{cx : Ax \leq b\}$  LP megoldható és a célfüggvénye korlátos fölülről  $\iff$  az (I) és a (B) rendszereknek van megoldása.

## Gyakorlatok

1. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülő pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádírigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petáért, a nyulaknak való 12 petáért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

2. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.

a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális, illetve maximális ára, amely mellett az előző feladatnál kapott előállítási mennyiségek mellett továbbra is maximális bevételt kapunk?

b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha...

- (i) ... 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
- (ii) ... 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak való?
- (iii) ... 130 vakondnadrágot gyártanak és 70 nyulaknak való?
- (iv) ... 90 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 110 nyúlnadrágot?

3. Egy kávépörkölő üzemben alap és prémium minőségű szemes kávé állítanak elő egyféle robusta és kétfajta arabica alapanyag felhasználásával. A titkos receptúra az alábbi:

		alap	prémium
Hozzávalók aránya	robusta	50%	–
	arabica 1	30%	40%
	arabica 2	20%	60%
Pörkölési sebesség		1 q/ó	4 q/ó

Három feltétel szab korlátot a termelésnek: a pörkölő maximális üzemideje 18 óra hetente, a csomagolóüzem kapacitása maximum 24 mázsa hetente, és a beszállítónk a második arabica alapanyagból legfeljebb 12 mázsát vállal hetente.

a) Hány mázsa alap, illetve prémium minőségű kávé állítsunk elő a haszon maximalizálása érdekében, ha az alap kávé 20.000, a prémium kávé 30.000. forint hasznunk van mázsánként?

b) A rendelkezésünkre álló forrásokból az üzem kapacitásának bővítését tervezzük. Mibe fektessünk be: a pörkölő üzemidejének növelésébe, vagy a csomagolóüzem kapacitásának bővítésébe?

4. Írjunk föl olyan lineáris programot, ami...

a) ... nem oldható meg.

b) ... megoldható, de a célfüggvénye nem korlátos fölülről.

c) ... megoldható, és a célfüggvénye korlátos fölülről.

5. a) Igazoljuk, hogy az  $(x \geq 0, Ax \leq b)$  és az  $(y \geq 0, yA \geq 0, yb < 0)$  lineáris rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg.

b) Igazoljuk ugyanezt az  $(x \geq 0, Ax = b)$  és az  $(yA \geq 0, yb < 0)$  rendszerekre is.

6. Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor nem oldható meg, ha az  $(A|b)$  kibővített együtthatómátrix soraiból elő lehet állítani tilos sort (azaz  $(0, 0, \dots, 0|p)$  alakú sort, ahol  $p \neq 0$ ). Ezt egyébként már tanultuk a Gauss-eliminációnál is.

7. Adott egy élsúlyozott teljes páros gráf, a csúcsosztályai  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , az  $a_i b_j$  él súlya  $w_{ij}$ . Írjunk föl olyan lineáris programot, melyet megoldva megkapjuk a gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását.