Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

5. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (`heger@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Megfigyelés. Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x2 + \ldots + a_{i,n}x_n \leq b_i$ kanonikus alakba hozható ($1 \leq i \leq k$, $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$) úgy, hogy az esetleges egyenlőségeket két egyenlőtlenségként írjuk fel, a fordított ($\geq$) egyenlőtlenségek helyett pedig a (-1)-szeresük szerepel $\leq$ relációval. A rendszer együtthatómátrixa és jobb oldala a jobbra látható A mátrix és b oszlopvektor, a kibővített együtthatómátrixa $(A|\underline{b})$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & \vdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} \end{pmatrix}}_{A} \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Fourier-Motzkin-elimináció A Gauss-eliminációhoz hasonló elemi sorekvivalens átalakításokat végzünk (sorcsere, sor λ-val végigszorzása, egy sornak a másikhoz hozzáadása), de itt csak $\lambda > 0$ lehet, ezért egy-egy változó elminációja bonyolultabb, mint a Gauss-elimináció esetén. Itt is egymás után elmináljuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat, azaz olyan egyenlőtlenségrendszerre térünk át, amelyikben az éppen eliminált változó már nem szerepel. Az x_i eliminációt az alábbiak szerint végezzük.

A kibővített együtthatómátrix sorait alkalmas pozitív konstansokkal szorozva elérjük, hogy az x_i oszlopában minden elem ± 1 vagy 0 legyen. Sorcserékkel a mátrixot a jobbra látható alakba írjuk, ahol az x_i oszlopában A_+, A_- ill. A_0 tartalmazza rendre az $1, -1$, ill. 0 elemeket.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_+ & b_+ \\ A_- & b_- \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$$

Az elimináció után az $A' = \left(\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$ mátrixot kapjuk, ahol A^*-ba gyűjtjük az összes lehetséges A_+ ill. A_--beli sorpár összegét. b^* pedig a b_+ és b_- megfelelő koordinátáinak összege. Az elimináció utáni mátrixban tehát x_i oszopában csak 0 együtthatók állnak.Az FM-elimináció során a változókat egymás után elimináljuk. Két eset fordulhat elő:

I. eset. Az eliminálás során tilos sor keletkezik, azaz olyan csupa 0 sora A-nak, amelyhez a b konstans negatív. Ekkor nincs megoldása a lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

II. eset. Nem keletkezik tilos sor. Ekkor $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ sorrendben értéket adunk az egyes változóknak. Az x_i-nek történő értékadáskor csak az x_i eliminációjakor elhagyott soroknak megfelelő egyenlőtlenségekre kell figyelni: ezek adnak az x_i-re egymásnak nem ellentmondó alsó és felső korlátokat. Ilyenkor tehát van megoldás, és konstráltunk is egyet.

Megfigyelés. A Fourier–Motzkin-elimináció során kapott minden egyes egyenlőtlenség az eredeti rendszer egyenlőtlenségeinek alkalmas nemnegatív többszöröseinek összege, azaz az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix sorainak nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja. Ez pontosan annak felel meg, hogy egy csupa nemengatív koordinátákból álló y sorvektorral balról szorozzuk az $(A|b)$ mátrixot; az i. sor együtthatója az y i. koordinátája. Tehát az elimináció során pontosan akkor kapunk tilos sort, ha van olyan nemnegatív koordinátákból álló y sorvektor, melyre $yA = 0$ és $yb < 0$.

Következmény: Farkas-lemma Az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszerre az alábbiak közül pontosan egy teljesül: (1) $\exists x : Ax \leq b$ ill. (2) $\exists y \geq 0 : yA = 0$, $yb < 0$.

Gyakorlatok

1. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer. Ha egy rendszer nem oldható meg, akkor mutassunk olyan y vektort, ami előállítja a tilos sort.

a)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &\leq 5 \\ x+2y-z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x-2y-2z &\geq -5 \\ x+y+z &\geq 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &\leq 5 \\ x+2y-z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x-2y-2z &\geq -5 \\ x+y+z &\geq 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &\leq 5 \\ x+2y-z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x-2y-2z &\geq -5 \\ x+y+z &\geq 5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+x_4 &\leq 10 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4 &\leq 12 \\ x_1+x_2+4x_3+x_4 &\leq 14 \\ x_1+x_2+x_3+5x_4 &\leq 16 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &\geq p \end{aligned}$$

Megoldás: Az **a)** , **b)** , **c)** feladatokat egyszerre oldjuk meg, mivel csak egy helyen van eltérés (az utolsó sor jobb oldalán). Felírjuk a csupa $\leq$-gel átírt rendszer kibővített együtthatómátrixát, a változókat az x, y, z sorrendben eliminájuk, először mindig sztenderd alakra hozva a mátrixot (az eliminálandó változó nemnulla együtthatóit ± 1-re módosítjuk alkalmas konstanssal való szorzással, majd a mátrix sorait úgy rendezzükm, hogy a változónk oszlopában ezek az együtthattók $+1$, -1, 0 sorrendben szerepeljenek), és utána elvégezve az eliminációs lépést (az összes lehetséges módon választunk egy $+1$-es és egy -1-es sorpárt és összeadjuk ezeket, az új mátrixban ezek az összegek, és az eredetiben a változónkat 0 együtthatóval tartalmazó sorok szerepelnek). A követhetőség kedvéért most dokumentáljuk azt is, hogy az új mátrix sorait hogyan kaptuk az előző mátrix soraiból. A k-adik mátrix i-edik sorát mindig s_i^k fogja jelölni.

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$	c) $\le$
s_1^1	2	1	1	5	5	5
s_2^1	1	2	-1	4	4	4
s_3^1	0	0	1	1	1	1
s_4^1	-1	2	2	5	5	5
s_5^1	-1	-1	-1	-3	-4	-5

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$	c) $\le$
$s_1^2 = \frac{1}{2}s_1^1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
$s_2^2 = s_2^1$	1	2	-1	4	4	4
$s_3^2 = s_4^1$	-1	2	2	5	5	5
$s_4^2 = s_5^1$	-1	-1	-1	-3	-4	-5
$s_5^2 = s_3^1$	0	0	1	1	1	1

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$	c) $\le$
$s_1^3 = s_1^2 + s_3^2$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$
$s_2^3 = s_2^2 + s_4^2$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$s_3^3 = s_2^2 + s_3^2$	0	4	1	9	9	9
$s_4^3 = s_2^2 + s_4^2$	0	1	-2	1	0	-1
$s_5^3 = s_5^2$	0	0	1	1	1	1

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$	c) $\le$
$s_1^4 = \frac{2}{5}s_1^3$	0	1	1	3	3	3
$s_2^4 = \frac{1}{4}s_3^3$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$
$s_3^4 = s_4^3$	0	1	-2	1	0	-1
$s_4^4 = 2s_2^3$	0	-1	-1	-1	-3	-5
$s_5^4 = s_5^3$	0	0	1	1	1	1

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$	c) $\le$
$s_1^5 = s_1^4 + s_4^4$	0	0	0	2	0	-2
$s_2^5 = s_2^4 + s_4^4$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$
$s_3^5 = s_3^4 + s_4^4$	0	0	-3	0	-3	-6
$s_4^5 = s_5^4$	0	0	1	1	1	1

A **c)** esetben az s_1^5 sor tilos sor, tehát az (eredeti) egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása. A keresett y tanúsító vektort megtaláljuk például visszahelyettesítésekkel:

$$s_1^5 = s_1^4 + s_4^4 = \frac{2}{5}s_1^3 + 2s_2^3 = \frac{2}{5}(s_1^2 + s_3^2) + 2(s_1^2 + s_4^2) = \frac{12}{5}s_1^2 + \frac{2}{5}s_3^2 + 2s_4^2 = \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{2}s_1^1 + \frac{2}{5}s_4^1 + 2s_5^1 = \frac{6}{5}s_1^1 + \frac{2}{5}s_4^1 + 2s_5^1,$$

tehát $y = (\frac{6}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}, 2)$ megfelelő választás. Az **a)** és **b)** esetekben még folytatni kell az eliminációt.

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$
$s_1^6 = s_4^5$	0	0	1	1	1
$s_2^6 = \frac{4}{3}s_2^5$	0	0	-1	$\frac{5}{3}$	-1
$s_3^6 = \frac{1}{3}s_3^5$	0	0	-1	0	-1
$s_4^6 = s_1^5$	0	0	0	2	0

	x	y	z	a) $\le$	b) $\le$
$s_1^7 = s_1^6 + s_2^6$	0	0	0	$\frac{8}{3}$	0
$s_2^7 = s_1^6 + s_3^6$	0	0	0	1	0
$s_3^7 = s_4^6$	0	0	0	2	0

Egyik esetben sem kaptunk tilos sort, tehát van megoldás. A változóknak az eliminálási sorrendjüket megfordítva adunk értéket az eliminálásukat közvetlenü megelőző állapot alapján.

A z változó a hatodik táblázatban szerepel utoljára. Az s_1^6 sort visszaírva szokásos egyenlőtlenség alakba $0x+0y+0z \le 1$, azaz a $z \le 1$ fölső korlát adódik mind az **a)** , mind a **b)** esetben. Az s_2^6 sorból az **a)** esetben $-z \le \frac{5}{3}$, azaz a $z \ge -\frac{5}{3}$ alsó korlát adódik, a **b)** esetben $-z \le -1$, azaz $z \ge 1$. Az s_3^6 sorból ugyanígy az **a)** esetben $z \ge 0$, illetve a **b)** esetben $z \ge 1$ alsó korlát adódik. Összevetve ezeket az **a)** részben $0 \le z \le 1$, a **b)** részben $1 \le z \le 1$ adódik, ezen korlátok között z tetszőlegesen megválasztható. Innentől csak az **a)** esettel foglalkozunk (a másik teljesen analóg). Válasszuk mondjuk a $z = 0$ értéket. A 4. táblázat sorain haladva az y változóra rendre $y + z \le 3$, azaz $z = 0$ miatt $y \le 3$; $y + \frac{1}{4}z \le \frac{9}{4}$, azaz $y \le \frac{9}{4}$; $y - 2z \le 1$, azaz $y \le 1$; $-y - z \le -1$, azaz $y \ge 1$ adódik. Összevetve a legerősebb korlátokat $1 \le y \le 1$, tehát itt csak az $y = 1$ értékadás lehetséges. Az x változó lehetséges értékeit ezután a második táblázat soraiból olvassuk ki: $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x + \frac{1}{2} \le \frac{5}{2}$, azaz $x \le 2$; $x + 2y - z = x + 2 \le 4$, azaz $x \le 2$; $-x + 2y + 2z = -x + 2 \le 5$, azaz $x \ge -3$; $-x - y - z = -x - 1 \le -3$, azaz $x \ge 2$. Összevetve $2 \le x \le 2$, azaz $x = 2$. Így az egyenlőltenségrendszer egy lehetséges megoldása $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$. Megjegyzés (bár nem volt kérdés): ráadásul az is látszik, hogy az **a)** részfeladat minden megoldása esetén z értéke 0 és 1 közé kell essen (és itt bárhová eshet).

2. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket. Ha egy rendszer nem oldható meg, akkor mutassunk olyan y vektort, ami előállítja a tilos sort.

a)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\le 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\ge -3 \\ 3x_1 + x_3 &\ge 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\le 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\le 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\ge -3 \\ 3x_1 + x_3 &\ge 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\le 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\ge -2 \\ x_1 + 2x_3 - 8x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 &\le 2 \end{aligned}$$

Megoldás: A megoldás teljesen analóg az előző feladatéval, nem részletezzük. Annyit tegyünk hozzá, hogy ha a csak a megoldhatóság volna a kérdés, akkor a pozitív választ egy alkalmas megoldás bemutatásával, a negatív választ pedig egy tilos sor alkalmas előállításával hitelt érdemlően igazolhatnánk. Megoldást, avagy tilos sort próbálhatunk keresni „ránézésre” is, egy egyszerű számolással ellenőrizhetjük, sikerrel jártunk-e. Ha nem akarunk obskúrus módszerekre hagyatkozni, megoldást a FM-eliminációval is kereshetünk; de a tilos sort előállító vektorra vonatkozó $yA = 0$ egyenletrendszert is megoldhatjuk (pl. Gauss-eliminációval), ahol A a (nem kibővített) együtthatómátrix. Itt azt kell tehát megvizsgálni, van-e olyan nemnegatív megoldás (az esetleges szabad paraméterek alkalmas megválasztásával), melyre $yb < 0$ teljesül. Nézzük ezt meg az **a)** feladat esetére. Az egyenlőtlenségrendszert sztenderd (csupa $\le$) alakra hozva az A együtthatómátrix és a b jobb oldal

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A Gauss-eliminációnál ne feledjük, hogy itt most a sorok felelnek meg a változóknak és az oszlopok az egyenleteknek (balról szorzunk a változóinkat tároló y vektorral), tehát a megszokott műveletkehez transzponálnunk kell a mátrixot

(az A mátrix i. oszlopából lesz az A^T mátrix i. sora). Az $A^T y = 0$ rendszer kibővített együtthatómátrixát felírjuk, Gauss-eliminációval megoldjuk (az első lépésben a számolásokat kényelmesebbé teendő fölcserélünk pár sort, majd leosztottunk az egy sorban levő együtthatók legnagyobb közös osztójával):

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 7 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{9}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A kapott redukált lépcsős alak alapján $x_4 = t \in \mathbb{R}$ szabad paraméter, $x_3 = \frac{3}{2}x_4 = \frac{3}{2}t$, $x_2 = \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}t$, $x_1 = \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}t$. A kapott $y = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t, t)$ megoldásvektor pontosan akkor nemnegatív, ha $t \geq 0$. Akkor kapunk tilos sort, ha ráadásul $yb < 0$, azaz $t + \frac{3}{2}t - 6t + 3t = -\frac{1}{2}t < 0$, így például $t = 2$-re tilos sort kapunk, tehát az eredeti rendszer nem oldható meg.

3. Egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek hogyan lehet a Fourier-Motzkin-eliminációval meghatározni egy olyan megoldását, amelyikben az x_n változó értéke minimális? És olyat, amelyikben az x_1 változó értéke maximális?

Megoldás: Ha van megoldás, akkor minden megoldás megkapható az FM elimináció utáni értékadásos módszerrel. Ezért a változók értékadásánál az x_n változónak választhatjuk a megengedett intervallumból a legkisebb értéket. Ha az x_1-et kell maximalizálni, akkor a változók eliminálását végezzük olyan sorrendben, hogy az x_1 maradjon utoljára. Ekkor a megoldás megkeresésekor x_1-nek adunk először értéket, válasszuk a lehető legnagyobbat.

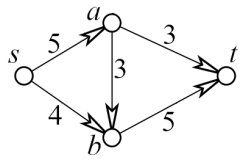
4. Adjunk olyan módszert, aminek a segítségével az $x_1, \ldots, x_n$ változókkal felírt tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszerhez található olyan megoldás, amire $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ minimális (ahol $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ konstansok).

Megoldás: Felveszünk egy új z ismeretlent és egy $z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ egyenletet. Úgy oldjuk meg FM-eliminációval az egyenlőtlenségrendszert, hogy z legyen az utoljára eliminált változó. Ha nem kapunk tilos sort, akkor lesz megoldás, és az értékadás során z-vel kezdünk. Így aztán vagy meg tudjuk határozni z lehetséges legkisebb értékét, vagy azt kapjuk, hogy z-re nincs alsó korlát, azaz tetszőlegesen kis z esetén is van megoldás.

5. Adjunk meg olyan módszert, ami tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszerhez az $x_1, \ldots, x_n$ változóknak olyan értékadását találja meg, amire a legjobban sérülő egyenlőtlenség a lehető legkevésbé sérül. Más szóval: találjuk meg az egyenlőtlenségrendszernek egy megoldását, ha van, ha pedig nincs, akkor úgy válasszunk értéket a változóknak, hogy az $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots a_{i,n}x_n - b_i$ mennyiségek közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

Megoldás: Bevezetünk egy z ismeretlent és minden $ax \leq b$ egyenlőtlenséget $ax \leq b + z$ egyenlőtlenséggel, minden $ax \geq b$ egyenlőtlenséget pedig $ax \geq b - z$ egyenlőtlenséggel helyettesítünk. Ha z-t eliminájuk utoljára, akkor tudunk olyan megoldást találni, amire z minimális, és épp ez a célunk.

6. Az oldalt látható (G, s, t, c) hálózaton szeretnénk maximális folyamot keresni. Hogyan lehetne ezt a Fourier–Motzkin-elimináció segítségével megtenni? (Aki nagyon elszánt, érdekességképpen megpróbálhatja ténylegesen megoldani ilymódon a feladatot.)



Megoldás: Általános esetben is megy a dolog: minden e élre vezessünk be egy x_e változót. A kapacitásfeltétel, a nemnegativitás és a csomóponti törvény egyaránt lineáris feltételeket szab a változókra:

$$\forall e \in E(G) \colon x_e \geq 0$$
$$\forall e \in E(G) \colon x_e \leq c(e)$$
$$\forall v \in V(G) - \{s,t\} \colon \sum_{uv \in E(G)} x_{uv} = \sum_{vu \in E(G)} x_{vu},$$

célunk pedig a nettó termelés,

$$\sum_{sv \in E(G)} x_{sv} - \sum_{vs \in E(G)} x_{vs}$$

maximalizálása. Ez változónként kettő, nem terminális csúcsonként egy lineáris feltétel, plusz egy maximalizálandó mennyiség. A konkrét esetben az élekből 5 változót kapunk, melyekre a nemnegativitás és a kapacitásfeltétel egyaránt

öt-öt, összesen 10 feltételt szab, továbbá két csúcsra kell felírnunk a csomóponti törvényt. A FM-elimináció tanult változatával (egy új változót és egy új egyenletet (két egyenlőtlenség) bevezetve) a feladat megoldjható; a kapott rendszer sztenderd alakban 6 változóból és 14 sorból fog állni.

7. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! u és v oszlopvektorokat jelölnek, a sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos. (Két $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ vektorra $u \leq v$ jelentése $u_i \leq v_i$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$-re. Az $u < v$ jelentése: $u \leq v$ és $u \neq v$.)

1. Ha $u \leq v$ és $u \neq v$ akkor $u < v$.
2. Ha $u \leq v$ és $u \geq v$ akkor $u = v$.
3. Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \geq 0$.
4. Ha $u \leq v$ és $a \geq 0$ akkor $a \cdot u \leq a \cdot v$.