Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

5. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Megfigyelés. Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x2 + \ldots + a_{i,n}x_n \leq b_i$ kanonikus alakba hozható ($1 \leq i \leq k$, $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$) úgy, hogy az esetleges egyenlőségeket két egyenlőtlenségként írjuk fel, a fordított ($\geq$) egyenlőtlenségek helyett pedig a (-1)-szeresük szerepel $\leq$ relációval. A rendszer együtthatómátrixa és jobb oldala a jobbra látható A mátrix és b oszlopvektor, a kibővített együtthatómátrixa $(A|\underline{b})$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & \vdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} \end{pmatrix}}_{A} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Fourier-Motzkin-elimináció A Gauss-eliminációhoz hasonló elemi sorekvivalens átalakításokat végzünk (sorcsere, sor λ-val végigszorzása, egy sornak a másikhoz hozzáadása), de itt csak $\lambda > 0$ lehet, ezért egy-egy változó elminációja bonyolultabb, mint a Gauss-elimináció esetén. Itt is egymás után elmináljuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat, azaz olyan egyenlőtlenségrendszerre térünk át, amelyikben az éppen eliminált változó már nem szerepel. Az x_i eliminációját az alábbiak szerint végezzük.

A kibővített együtthatómátrix sorait alkalmas pozitív konstansokkal szorozva elérjük, hogy az x_i oszlopában minden elem ± 1 vagy 0 legyen. Sorcserékkel a mátrixot a jobbra látható alakba írjuk, ahol az x_i oszlopában A_+, A_- ill. A_0 tartalmazza rendre az 1, -1, ill. 0 elemeket.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_+ & b_+ \\ A_- & b_- \\ A_0 & b_0 \end{array} \right)$$

Az elimináció után az $A' = \left(\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ A_0 & b_0 \end{array} \right)$ mátrixot kapjuk, ahol A^*-ba gyűjtjük az összes lehetséges A_+ ill. A_--beli sorpár összegét. b^* pedig a b_+ és b_- megfelelő koordinátáinak összege. Az elimináció utáni mátrixban tehát x_i oszlopában csak 0 együtthatók állnak.Az FM-elimináció során a változókat egymás után elimináljuk. Két eset fordulhat elő:

I. eset. Az eliminálás során tilos sor keletkezik, azaz olyan csupa 0 sora A-nak, amelyhez a b konstans negatív. Ekkor nincs megoldása a lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

II. eset. Nem keletkezik tilos sor. Ekkor $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ sorrendben értéket adunk az egyes változóknak. Az x_i-nek történő értékadáskor csak az x_i eliminációjakor elhagyott soroknak megfelelő egyenlőtlenségekre kell figyelni: ezek adnak az x_i-re egymásnak nem ellentmondó alsó és felső korlátokat. Ilyenkor tehát van megoldás, és konstráltunk is egyet.

Megfigyelés. A Fourier–Motzkin-elimináció során kapott minden egyes egyenlőtlenség az eredeti rendszer egyenlőtlenségeinek alkalmas nemnegatív többszöröseinek összege, azaz az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix sorainak nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja. Ez pontosan annak felel meg, hogy egy csupa nemengatív koordinátákból álló y sorvektorral balról szorozzuk az $(A|b)$ mátrixot; az i. sor együtthatója az y i. koordinátája. Tehát az elimináció során pontosan akkor kapunk tilos sort, ha van olyan nemnegatív koordinátákból álló y sorvektor, melyre $yA = 0$ és $yb < 0$.

Gyakorlatok

1. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer. Ha egy rendszer nem oldható meg, akkor mutassunk olyan y vektort, ami előállítja a tilos sort.

a)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &\leq 5 \\ x+2y-z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x-2y-2z &\geq -5 \\ x+y+z &\geq 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &\leq 5 \\ x+2y-z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x-2y-2z &\geq -5 \\ x+y+z &\geq 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x+y+z &\leq 5 \\ x+2y-z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x-2y-2z &\geq -5 \\ x+y+z &\geq 5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+x_4 &\leq 10 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4 &\leq 12 \\ x_1+x_2+4x_3+x_4 &\leq 14 \\ x_1+x_2+x_3+5x_4 &\leq 16 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &\geq p \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket. Ha egy rendszer nem oldható meg, akkor mutassunk olyan y vektort, ami előállítja a tilos sort.

a)
$$\begin{aligned} 7x_1+5x_2+3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1+5x_2-6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1+x_3 &\geq 4 \\ 2x_1-3x_4 &\leq 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 8x_1+5x_2+3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1+5x_2-6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1+x_3 &\geq 4 \\ 2x_1-3x_4 &\leq 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-5x_2-3x_3+2x_4 &\geq -2 \\ x_1+2x_3-8x_4 &= 5 \\ x_1-2x_2-4x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

3. Egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek hogyan lehet a Fourier-Motzkin-eliminációval meghatározni egy olyan megoldását, amelyikben az x_n változó értéke a lehető legkisebb? És olyat, amelyikben az x_1 változó értéke a lehető legnagyobb?

4. Adjunk meg olyan módszert, ami tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszerhez az $x_1, \ldots$ változóknak olyan értékadását találja meg, amire a legjobban sérülő egyenlőtlenség a lehető legkevésbé sérül. Más szóval: találjuk meg az egyenlőtlenségrendszernek egy megoldását, ha van, ha pedig nincs, akkor úgy válasszunk értéket a változóknak, hogy az $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots a_{i,n}x_n - b_i$ mennyiségek közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

5. Adjunk olyan módszert, aminek a segítségével tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszerhez található olyan megoldás, amire $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ minimális.

6. Folyam mint lin program

7. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! u és v oszlopvektorokat jelölnek, a sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos. (Két $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ vektorra $u \leq v$ jelentése $u_i \leq v_i$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$-re. Az $u < v$ jelentése: $u \leq v$ és $u \neq v$.)

1. Ha $u \leq v$ és $u \neq v$ akkor $u < v$.
2. Ha $u \leq v$ és $u \geq v$ akkor $u = v$.
3. Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \geq 0$.
4. Ha $u \leq v$ és $a \geq 0$ akkor $a \cdot u \leq a \cdot v$.