Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

4. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (`heger@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Definíció: A *hálózat* egy (G,s,t,c) négyes, ahol $G=(V,E)$ egy irányított gráf, $c: E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s,t \in V$ a G különböző csúcsai, ún. *termináljai* (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f: E \to \mathbb{R}_+$ egy *folyam*, ha $0 \le f(e) \le c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv\in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s,t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-szabály*, esetleg *csomóponti törvény*). Az f folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az f folyam *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su\in E} f(su) - \sum_{us \in E} f(us)$.

Definíció: A fenti hálózatban ha $X \subset V$ olyan halmaz, hogy $s \in X \not\ni t$, akkor a hálózat X által indukált *(st-)vágása* az X és $V \setminus X$ között futó élek halmaza, melybe beletartoznak a $V\setminus X$-ből X-be futó élek is. Az X által indukált st-vágás kapacitása $c(X) := \sum_{u\in X, v \in V\setminus X} c(uv)$, magyarán az X-ből $V \setminus X$-be futó (azaz X-ből kilépő) élek összkapacitása.

Állítás: Ha (G,s,t,c) egy hálózat, f egy folyam és $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást indukál, akkor $m_f = \sum_{uv\in E(G): u \in X, v\notin X} f(uv) - \sum_{uv \in E(G): u\notin X, v\in X} f(uv)$, azaz a folyamnagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel. Az utóbbi mindig legfeljebb $c(X)$, és pontosan akkor egyenlő $c(X)$-szel, ha $f(uv) = c(uv)$ minden X-ből kilépő uv élen, és $f(uv) = 0$ minden X-be belépő uv élen. **Köv.:** Ha f folyam és X st-vágást indukál, akkor $m_f \le c(X)$.

Állítás: Ha a (G,s,t,c) hálózatban egy f st-folyam és egy $s \in X \not\ni t$ vágás esetén $m_f = c(X)$ teljesül, akkor f maximális nagyságú st-folyam, továbbá X minimális kapacitású st-vágást indukál.

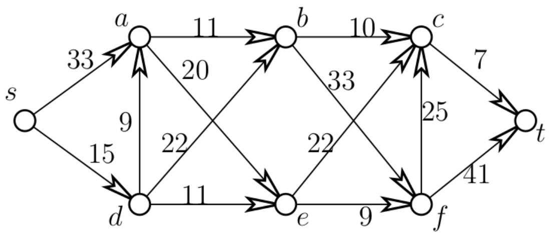
Ford-Fulkerson tétel: Tetszőleges hálózatban $\max m_f = \min c(X)$, azaz a maximális folyamnagyság megegyezik a minimális vágáskapacitással.

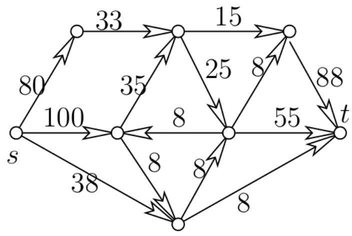
Definíció: Ha (G,s,t,c) egy hálózat, f pedig egy folyam, akkor a $G_f = (V(G), E_f)$ az f-hez tartozó *segédgráf*, melyre $uv \in E_f$ ha $uv \in E(G)$ és $f(uv) < c(uv)$ (*előreél*) vagy ha $vu \in E(G)$ és $f(vu) > 0$ (*visszaél*). Az f folyamhoz egy *javító út* a G_f segédgráf egy s-ből t-be vezető irányított útja.

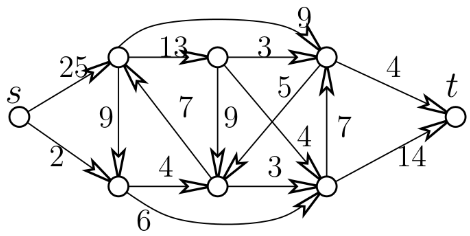
Növelés javító úttal: Ha találunk egy f folyamhoz tartozó G_f segédgráfban st utat (javító utat), akkor f növelhető: a javító út mentén az előreéleken ε-nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken ε-nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamot, a folyam nagysága ε-nal nő.

Javító utas algoritmus: Kiindulunk egy f folyamból (például $f \equiv 0$), és addig növelünk az aktuális f-hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs javító út, akkor a folyam maximális. Ezt igazolja, hogy a segédgráfban az s-ből elérhető csúcsok X halmaza ekkor minimális st-vágást indukál.

Gyakorlatok



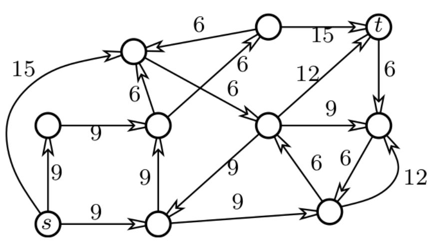


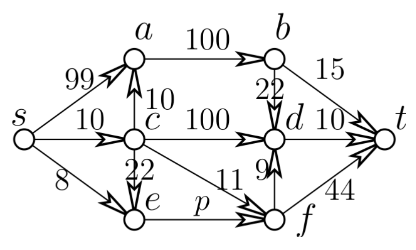


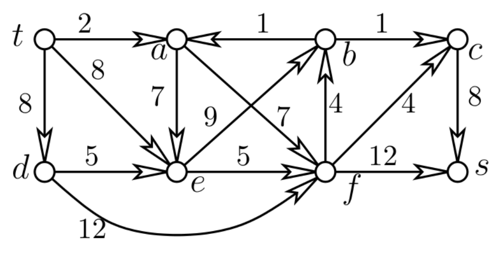
1. **a)** Mutassunk a fenti, bal oldali ábrán látható (G,s,t,c) hálózatban egy maximális st-folyamot (és igazoljuk is a maximalitását). **b)** Találjunk a fenti, középső ábrán látható hálózatban minimális kapacitású st-vágást, és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású st-vágás.

2. A sithek Sötét Testvérisége a fenti, jobb oldalon látható gráf s csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács t támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének t-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon s-ből t-be jutni.

3. Igaz-e, hogy az alábbi, bal ábrához tartozó (G,s,t,c) hálózatban a maximális folyamnagyság pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)







4. Határozzuk meg az előző ábrán, a középső hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyamnagyság pontosan 42.

5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. Az előző oldal alján a jobb oldali ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa itt a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Cél: a lehető leggyorsabban zárjunk le minden lehetséges s-be vezető utat az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre.

6. Adott a D irányított gráf valamint élein egy c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s,t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw-folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw-folyam.

7. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív ε-nal csökkentve a maximális folyamnagyság is pontosan ε-nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas ε-nal növelve, a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él?

8. Rajzoljunk egy hálózatot, amiben valamelyik él kapacitása egy p paraméter. Határozzuk meg ebben a hálózatban p függvényében a maximális folyamnagyságot.

9***.** Legyen s és t egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit s-től t felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen?

10. a) Igazoljuk, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú folyam, amely minden élen egész értéket vesz föl (más szóval *egészfolyam*). **b)** Igaz-e az is, hogy egész kapacitások esetén minden maximális folyam egészfolyam?

11. Mutassuk meg a Ford-Fulkerson-tétel segítségével, hogy tetszőleges G páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$ teljesül a független élek maximális és a lefogó pontok minimális számára.

12***.** Igazoljuk, hogy ha a (G,s,t,c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy folyam, akkor van olyan f' egészfolyam is, amire $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.

13. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

14. Egy (G,s,t,c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15.