Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

3. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Konvenció: Tetsz. $f : H \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq H$ esetén $\tilde{f}(A) = \sum\{f(a) : a \in A\}$.
Definíció: Adott $G = (A \cup B, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén a P párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde{w}(P) \geq \tilde{w}(P')$ teljesül a G tetszőleges P' párosítására.
Megfigyelés: (1) A maximális súlyú párosítás $w \equiv 1$ esetén maximális méretű párosítást jelent.
(2) A maximális súlyú párosítás keresésének feladata visszavezethető nemnegatív élsúlyozású teljes páros gráfban maximális súlyú **teljes** párosítás keresésére: elhagyjuk a negatív súlyú éleket, a kisebbik színosztályt kiegészítjük, hogy a két színosztály mérete egyforma legyen, és a páros gráfból „hiányzó” éleket 0 súllyal vesszük be.
A továbbiakban maximális súlyú teljes párosítást keresünk nemnegatív súlyfüggvény mellett.
Definíció: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c : V \to \mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e = uv \in E$ élre $w(e) \leq c(u) + c(v)$ teljesül. Az e él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.
Állítás: Ha $c : V \to \mathbb{R}_+$ súlyozott lefogás a w súlyfüggvényhez, akkor tetszőleges P párosításra $\tilde{w}(M) = \sum\{w(uv) : uv \in P\} \leq \sum\{c(u) + c(v) : uv \in P\} \leq \tilde{c}(V)$ teljesül. (Megjegyzés: ha P *teljes* párosítás, akkor a súlyfüggvény nemnegativitására nincs szükség, és az utolsó becslésben mindig egyenlőség áll fenn.)
Következmény: (1) Ha $\tilde{w}(P) = \tilde{c}(V)$ teljesül valamely P teljes párosításra és c súlyozott lefogásra, akkor P maximális súlyú teljes párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.
(2) Ha a P teljes párosítás pontos élekből áll, akkor $\tilde{w}(P) = \tilde{c}(V)$.
Egerváry-algoritmus (magyar módszer) páros gráfban max súlyú teljes párosítás keresésére.
Input: $n \times n$ táblázat (sorok ill. oszlopok a színosztályok, a mezőkbe írt számok az élsúlyok).
Output: súlyozott lefogás és teljes párosítás pontos élekből.
A sorokhoz 0 súlyt rendelünk, az oszlopokhoz pedig az adott oszlopban álló maximumot. A pontos éleken keresünk maximális méretű párosítást alternáló utakkal (ha fedetlen oszlopból fedetlen sorba érünk, az út mentén cserélve növeljük a párosítást, ahányszor lehet). Ha ez teljes párosítás, kész vagyunk. Ha nem, akkor megkeressük a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető sorokat és oszlopokat. Előbbieken növeljük, utóbbiakon csökkentjük a súlyozott lefogást a legnagyobb olyan ε értékkel, amivel még továbbra is súlyozott lefogást kapunk. Ezáltal a $\tilde{c}(V)$ csökken, és több oszlop lesz alternáló úton elérhető a fedetlen oszlopok halmazából. Innen iterálunk, azaz vagy nagyobb méretű párosítást találunk pontos élekből, vagy tovább csökkentjük a súlyozott lefogás összsúlyát. Előbb-utóbb meglesz a pontos élekből álló teljes párosítás.

Gyakorlatok

1. A G teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az a_ib_j él súlya pedig az egyik jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást mindhárom mátrix esetén (és mutassuk meg róluk, hogy maximálisak).

$$\textbf{a)} \begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{c)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Nézzük például az **a)** -t. Az Egerváry-algoritmust alkalmazzuk: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz, ill. a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. A kiindulási súlyozott lefogásban az oszlopmaximok, azaz $9, 11, 5, 6$, és a sorokon 0 szerepel, a pontos éleket vastag betűk jelzik. Az egymást követő ábrákon az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló párosítás elemei láthatók. Ha van javító út, aláhúzássokkal jelöljük, és amentén növeljük a párosítást. Ha nincs, a nyilak a fedelten (szabad) oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokat és sorokat jelölik (a fedetlen oszlop bármely pontos éléből indulhatunk, és azok a sorok/oszlopok számítanak elértnek, amelyben levő pontos élre rá tudutunk lépni). Előbbieken csökkentjük, utóbbiakon növeljük a lefogás súlyát.

$$\begin{array}{|cccc||cc}
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \hline
\boxed{\mathbf{9}} & \mathbf{11} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 0 & \leftarrow \\
5 & 6 & 2 & 4 & 0 & \\
5 & 8 & \boxed{\mathbf{5}} & 5 & 0 & \\
4 & 8 & 1 & 3 & 0 & \\ \hline\hline
9 & 11 & 5 & 6 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccc||cc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \hline
\boxed{\mathbf{9}} & \mathbf{11} & 5 & \mathbf{6} & 1 & \leftarrow \\
5 & 6 & 2 & 4 & 0 & \\
5 & 8 & \boxed{\mathbf{5}} & \mathbf{5} & 0 & \leftarrow \\
4 & 8 & 1 & 3 & 0 & \\ \hline\hline
8 & 10 & 5 & 5 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccc||c}
 & & & & \\ \hline
\boxed{\mathbf{9}} & \mathbf{11} & 5 & \mathbf{6} & 2 \\
5 & 6 & 2 & \underline{\mathbf{4}} & 0 \\
5 & 8 & \boxed{\mathbf{5}} & \mathbf{5} & 1 \\
4 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ \hline\hline
7 & 9 & 4 & 4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccc||cc}
\downarrow & \downarrow & & & & \\ \hline
\boxed{\mathbf{9}} & \mathbf{11} & 5 & \mathbf{6} & 2 & \leftarrow \\
5 & 6 & 2 & \boxed{\mathbf{4}} & 0 & \\
5 & 8 & \boxed{\mathbf{5}} & \mathbf{5} & 1 & \\
4 & 8 & 1 & 3 & 0 & \\ \hline\hline
7 & 9 & 4 & 4 & &
\end{array}$$

$\boxed{9}$	**11**	5	6	3
5	6	2	$\boxed{4}$	0
5	8	$\boxed{5}$	**5**	1
4	$\underline{\mathbf{8}}$	1	3	0
6	8	4	4	

$\boxed{9}$	**11**	5	6	3
5	6	2	$\boxed{4}$	0
5	8	$\boxed{5}$	**5**	1
4	$\boxed{8}$	1	3	0
6	8	4	4	

A kapott párosítás pontos élekből áll, tehát a tanultak alapján maximális súlyú. Ha ez nem volna elég: a párosítás összsúlya 26, a súlyozott lefogásunké szintén. A tanultak szerint minden (teljes) párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint egy tetszőleges súlyozott lefogás összsúlya, ezért nincs nagyobb összúlyú teljes párosítás, sem kisebb összsúlyú súlyozott lefogás.

Nézzük meg a **b)** -t is, itt minden lépést külön kiírva:

8	**3**	5	4	0
7	1	6	2	0
9	**3**	4	1	0
4	2	**7**	**5**	0
9	3	7	5	

8	$\boxed{3}$	5	4	0
7	1	6	2	0
$\boxed{9}$	**3**	4	1	0
4	2	$\boxed{7}$	**5**	0
9	3	7	5	

		↓	↓		
8	$\boxed{3}$	5	4	0	
7	1	6	2	0	
$\boxed{9}$	**3**	4	1	0	
4	2	$\boxed{7}$	**5**	0	←
9	3	7	5		

8	$\boxed{3}$	5	**4**	0
7	1	**6**	2	0
$\boxed{9}$	**3**	4	1	0
4	2	$\boxed{7}$	**5**	1
9	3	6	4	

8	$\boxed{3}$	5	**4**	0
7	1	$\underline{\mathbf{6}}$	2	0
$\boxed{9}$	**3**	4	1	0
4	2	$\underline{\boxed{7}}$	$\underline{\mathbf{5}}$	1
9	3	6	4	

8	$\boxed{3}$	5	**4**	0
7	1	$\boxed{6}$	2	0
$\boxed{9}$	**3**	4	1	0
4	2	**7**	$\boxed{5}$	1
9	3	6	4	

Az utolsó lépésben javító utat találtunk (fedetlen oszlopból fedetlen sorba jutottunk alternálva, három mezőt bejárva), e mentén cseréltünk, így kaptuk a teljes párosítást. Ez pontos élekből áll, tehát a tanultak alapján maximális súlyú. A súlya amúgy $9+3+6+5=23$, és a súlyozott lefogásunk összsúlya is $9+3+6+4+0+0+0+1=23$, ami szintén igazolja a párosítás maximalitását és a súlyozott lefogás minimalitását.

2. A jobb oldali mátrix a G páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok, ill. az oszlopok felelnek meg, az (i,j) pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor X áll a mátrixban.) Keressünk G-ben maximális súlyú párosítást (és igazoljuk is a maximalitását).

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A tanult visszavezetést alkalmazzuk: egészítsük ki a mátrixok egy csupa 0 sorral, és az X-eket is cseréljük 0-ra. Ekkor az új mátrixban kereshetünk maximális súlyú párosítást pl. a magyar módszerrel, és ennek az eredeti mátrixban értelmezhető elemei maximális súlyú párosítást adnak.

3. A G teljes páros gráf színosztályai legyenek $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ill. $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen $|i-j^2|$. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és igazoljuk is, hogy maximális). (ZH '09.)

4. Legyenek a G teljes páros gráf színosztályai $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ és $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme.
a) Súlyozott lefogás-e a $c(a_i)=i$, $c(b_i)=i+1$ $(1\le i\le 5)$?
b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

5. A jobbra látható táblázat azt mutatja, hogy ha az A,B,C, ill. a D dolgozó végzi el az $1,2,3,4$ munkát, akkor várhatóan mennyi azon cég haszna. Sajnos a 4-es munka egy garanciális javítás, csak veszteség van rajta, de muszáj elvégezni. Adjunk meg egy optimális hozzárendelést (mely maximalizálja a cég profitját), és igazoljuk is az optimalitást.

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	1	-4
B	4	5	2	-1
C	1	2	1	-4
D	4	4	3	-3

Megoldás: A magyar módszert csak nemnegatív élsúlyokra tanultuk, de itt vannak negatív élsúlyok. Viszont ha az utolsó oszlop minden elemét 4-gyel növeljük, akkor minden teljes párosítás összúlya pontosan 4-gyel nő (mivel pontosan egy elemet tartalmaz az utolsó oszlopból), tehát a maximális súlyú teljes párosítások ugyanazok az eredeti problémára, mint a módosítottra. Elég tehát a módosított problémára találni egy optimális hozzárendelést (amit megtehetünk a magyar módszerrel), az az eredetire is optimális lesz. (Azt is megtehetjük, hogy a mátrix minden elemét megnöveljük néggyel; persze ekkor is nemnegatív mátrixot kapunk, és itt minden teljes párosítás súlya 16-tal nő, tehát ugyancsak nem változik, hogy mely teljes párosítások maximális súlyúak.)

6. Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt.

Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek. Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni. Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!) (ZH'20)

	A	**B**	**C**
1	9	11	7
2	13	11	10
3	10	12	9
4	14	20	16
5	10	10	8

7. A G páros gráf élei az $\{A,B,C,D\}$ ill. $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az A,B,C ill. D pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli? (Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.) (pZH '20)

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	7	10	5
B	2	4	3	7	1
C	5	7	3	7	3
D	5	5	4	8	2

Megoldás:

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	$\boxed{7}$	10	5
B	2	4	3	$\boxed{7}$	1
C	5	$\boxed{7}$	3	7	3
D	$\boxed{5}$	5	4	8	2
	3	4	2	6	

Először úgy választjuk ki a lehető legkisebb súlyokat az $\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}$ csúcsokhoz, hogy azok a lehető legkisebb összsúlyú súlyozott lefogást alkossák a feladatban meghatározott súlyokkal. Ehhez a táblázat minden oszlopához kiválasztjuk a legnagyobb olyan számot, amit úgy kapunk, hogy az adott oszlop eleméből kivonjuk az adott elem sorában álló előre megadott súlyt. Az így kapott értékek láthatók a bal oldali táblázat alsó sorában. **(4 pont)**
Az így kapott súlyozott lefogásra pontos élekből található teljes párosítás, pl a bekeretezett mezőkön állók ilyet adnak. **(2 pont)**

A kapott 26 összsúlyú teljes párosítást miatt minden súlyozott lefogás összsúlya legalább 26. **(2 pont)**
Mivel a megadott súlyokat egy pontosan 26 összsúlyú súlyozott lefogássá terjesztettük ki, ezért ez egy minimális összsúlyú súlyozott lefogás, a feladat kérdésére tehát igen a válasz. **(2 pont)**

8. Az $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}$ csúcsokkal rendelkező páros gráf élsúlyait az alábbi táblázat tartalmazza. Súlyozott lefogást alkotnak-e a sorok mellett és az oszlopok alatt álló számok? Ha igen, akkor döntsük el, hogy minimális súlyú-e ez a súlyozott lefogás. Ha igen, igazoljuk ezt, ha nem, akkor adjunk egy kisebb súlyú súlyozott lefogást.

	A	**B**	**C**	**D**	
1	7	8	6	6	4
2	6	5	4	3	2
3	7	8	5	4	4
4	5	4	3	4	2
	4	4	2	2	

9. A Bergengóc Szabad Egyetem Matematika Tanszékén három professzor (1, 2 és 3) hirdetett meg kutatási témákat, melyek iránt négy diák érdeklődik (A, B, C és D). A mellékelt táblázat mutatja, hogy ha az adott diák a megfelelő oktatóval működik együtt, akkor a várható kutatási eredményeket milyen impakt faktorú lapban tervezik publikálni. Minden témavezetőnek legfeljebb két diákja lehet. Az egyetemi és nemzetközi rangsorolási szempontokat figyelembe véve a tanszék érdeke az, hogy a megjelenő publikációk összesített impakt faktora minél magasabb legyen. Adjunk olyan hozzárendelést, mely optimális ebben a tekintetben.

	A	**B**	**C**	**D**
1	6	8	6	5
2	6	5	4	3
3	7	8	5	4

Megoldás: Mivel minden témavezetőnek két témára van kapacitása, másoljuk le a táblázat sorait még egy-egy példányban, így kapunk egy 6×4-es táblázatot. Ebben kell maximális súlyú bástyaelrendezést (párosítást) keresni, amire a magyar módszer (két új, csupa 0 elemet tartalmazó oszlop bevezetése után) alkalmazható.

10. Az udvaron négyféle munkát kell elvégezni $(1,2,3,4)$, melyre négy, kiváló referenciákkal rendelkező, helyi vállalkozótól kértünk árajánlatot (A, B, C és D). A jobbra látható táblázatban foglaltuk össze az árajánlatokat (százezer forintban értve). Természetesen szeretnénk a költségeket leszorítani (előzetes minőségi aggályok nem merülnek föl). Melyik munkára melyik vállalkozóval szerződjünk le, ha a mielőbbi befejezés érdekében a munkákat párhuzamosan szeretnénk végeztetni? (Egy vállalkozónak csak egy munkát adhatunk emiatt.)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

11*. Legyen $F=(V,E)$ egy fa, és legyen $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ a fa élein egy hosszfüggvény. Az a cél, hogy F csúcsaiból minél több diszjunkt párt képezzünk úgy, hogy az egyes párokat a fában összekötő utak összhossza a lehető legnagyobb legyen. Adjunk gyors algoritmust, ami megtalál egy optimális párosítást, és írjunk le egy olyan bizonyítékot, ami minden esetben igazolja a talált párosítás optimalitását.