Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

2. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def.: *Párosítás* alatt független (azaz közös végpont nélküli) élhalmazt értünk. A G gráf egy U ponthalmaza *lefogó* tulajdonságú, ha G minden élére illeszkedik legalább egy U-beli csúcs. $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális száma, $\tau(G)$ pedig a G gráf lefogó ponthalamazai közül a legkisebb mérete.

Áll.: Minden G gráfban $\nu(G) \leq \tau(G)$. **Kőnig tétele:** ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Def.: Ha $P \subset E(G)$ egy párosítás G-ben, egy út *alternáló* P-re nézve, ha élei felváltva P-beliek és P-n kívüliek. Egy út *javító út (P-re nézve*, ha alternáló, és végpontjait nem fedi P.

Megfigyelés: ha van javító út P-re nézve, akkor az út P-beli éleit kidobjuk P-ből, a P-n kívülieket pedig bevesszük P-be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz.

Tétel: Legyen P egy párosítás G-ben. Ekkor $|P| = \nu(G)$ pontosan akkor teljesül, ha nincs G-ben javító út P-re nézve.

Javító utas algoritmus páros gráfokban. Tetsz. A és B színosztályokkal rendelkező páros gráf maximális méretű párosítását megkaphatujuk a javító utas algoritmus segítségével. Input: $G = (A, B; E)$ ps gráf, és egy $P \subset E$ párosítás. Output: egy maximális párosítás. Kiindulunk az P (akár üres) párosításból, és javító utat keresünk. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy P éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd valahogyan (pl BFS-sel) ellenőrizzük, hogy van-e irányított (egyszersmind alternáló) út egy A-beli fedetlen pontból egy B-beli fedetlenbe. 1) Ha van ilyen út, akkor az egy javító út, segítségével módosítjuk (növeljük) a P párosítást, majd újra keresünk javító utat. 2) Ha már nincs javító út, akkor az aktuális P párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Ez nyilvánvaló, ha P az A minden csúcsát fedi. Ha nem, P maximalitását alátámaszthatjuk így is: legyen $X \subset A$ és $Y \subset B$ az A-beli fedetlen csúcsok F halmazából alternáló úton elérhető csúcsok halmaza (vegyük észre: $F \subset X$, és $|P| = |A| - |F|$). Ekkor $(A \setminus X) \cup Y$ egy $|P|$ méretű lefogó ponthalmaz (mert nem lehet él X és $B \setminus Y$ közt), így $|P| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |P|$ miatt $\tau(G) = \nu(G) = |P|$.

Def.: Ha $G = (V, E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists u \in X, vu \in E\}$ az X ponthalmaz G-beli *szomszédsága*.

Megfigyelés: Egy $X \subset A$ csúcshalmazbeli csúcsok párjai minden párosításnál $N(X)$-ben vannak. Tehát ha $|N(X)| < |X|$, akkor nincs olyan párosítás, ami X minden csúcsát fedi (és így A csúcsait sem tudja maradéktalanul fedni).

Megfigyelés: Az előző, 2)-es eset gondolatmenetét folytatva $N(X) = Y$ adódik, és mivel $|N(X)| = |Y| = |X| - |F|$, ez igazolja, hogy tetszőleges párosítás esetén legalább $|F|$ darab X-beli csúcsnak nem lesz párja, tehát nincs $(|A| - |F|)$-nél nagyobb párosítás. Ebből az is következik, hogy ha nincs G-ben A-t fedő párosítás, azaz a fenti helyzetben $|F| \neq 0$, akkor $|N(X)| = |X| - |F| < |X|$.

Hall tétele: Tetsz. $G = (A, B; E)$ páros gráfban pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

Megjegyzés.

(1) Páros gráf reprezentálható nemnegatív egészekből álló mátrixszal, ahol a sorok az egyik, az oszlopok a másik színosztálynak felelnek meg, és a mátrix elemei az adott sornak ill. oszlopnak megfelelő csúcsok között futó élek száma. A gráf párosítása olyan pozitív értékeket tartalmazó mezők kiválasztásának felel meg, amelyek bástyaelhelyezést alkotnak, azaz minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy kiválasztott mező van.

(2) Az alternáló utas algoritmussal tetszőleges $0/1$ mátrixban tudunk maximális számú, bástyaelhelyezésben álló 1-est találni. Minden lépésben vagy eggyel több egyest találunk, vagy megállapítjuk, hogy elértük a maximumot. Ehhez fedetlen (azaz 1-est nem tartalmazó) oszlopból fedetlen sorba kell eljutni felváltva vízszintesen és függőlegesen 1-esről 1-esre lépve úgy, hogy a kiválasztott és ki nem választott 1-esek felváltva következnek. Ha ez sikerül, akkor a lépcsőzetes út mentén cserékünk, és több bástyaelhelyezésben álló 1-est kapunk. Ha nem sikerül, akkor megkapjuk az oszlopok egy X halmazát, amire az X-beli 1-esek $|X| - k$ sort töltenek ki, ahol k a fedetlen oszlopok száma. Ezért tetsz. bástyaelhelyezés esetén legalább k oszlopban nem áll 1-es. Mi épp ilyet találtunk, vagyis megvan a maximum.

Gyakorlatok

1. Legyen $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 16\}$ piros színnel (képzeletben), $B = \{-4, -3, -2, \ldots, 4\}$ kék színnel (képzeletben), $E = \big\{\{a, b\} : a \in A, b \in B, b^2 \geq a\big\}$. Mekkora a legnagyobb párosítás mérete $G = (A, B; E)$-ben? Mutassunk olyan $X \subset A$ halmazt, melyre $|X|$ és $|N(X)|$ összehasonlítása igazolja, hogy az előzőleg adott érték valóban éppen $\nu(G)$. Igazoljuk a talált párosítás maximalitását úgy is, hogy keresünk egy ugyanakkora lefogó ponthalmazt.

Megoldás: Akár fel is rajzolhatjuk a gráfot, mindkét színosztályban 9 csúcs lesz, de ez nem szükséges. A színek csak azért kellenek, mert különben a 0, 2, 4 számok közös elemek lennének A-ban és B-ben, de két diszjunkt halmazt szeretnénk. Egy 7 méretű párosítás az alábbi: $\{0, 1\}$, $\{2, -2\}$, $\{4, 2\}$, $\{6, -3\}$, $\{8, 3\}$, $\{15, -4\}$, $\{16, 4\}$. Legyen $X = \{10, 12, 14, 16\} \subset A$. Ekkor $N(X) = \{4, -4\}$, tehát $|N(X)| = |X| - 2$, így bármely párosítás kénytelen fedetlenül hagyni legalább 2 csúcsot X-ből, tehát legfeljebb $|A| - 2 = 7$ csúcsot fedhet A-ból. A talált párosításunk éppen ekkora, tehát $\nu(G) = 7$.

2. A jobbra látható táblázatban álló X-ek közül legfeljebb hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott X-ek bástyaelhelyezést alkossanak? Mi köze ennek páros gráfok párosításaihoz?

	X		X		
	X			X	
			X	X	
X		X			X
	X			X	
			X		

Megoldás: A mátrixból készíthetünk páros gráfot úgy, hogy az egyik színosztály csúcsai az oszlopoknak, a másiké a soroknak felelnek meg, és akkor húzzunk élt egy oszlopcsúcs és egy sorcsúcs közé, ha a metszetükben van X. Ekkor egy bástyaelhelyezés a mátrixban éppen egy párosítás lesz a páros gráfban. (Ez persze fordítva is működik, páros gráfot reprezentálhatunk mátrixszal ilymódon.)
A maximum meghatározását megkísérelhetjük ötletszerűen, vagy a tanult alternáló utas módszerrel is. Nézzük meg most az előbbit: ránézésre keresünk minél több X-et bástyaelhelyezésben, például találunk 4-et az $(5,2)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(2,5)$ mezőkön (a jelölés: $(\text{sor}, \text{oszlop})$). A maximalitás igazolásához nem elég megtalálni a maximális számú X-et: be is kell bizonyítani, hogy több nem található. Ha találunk néhány sort és oszlopot (összesen mondjuk k darabot), melyek lefedik az *összes* X-et a táblázatban, akkor világos, hogy nem lehet k-nál több bástyát kiválasztani. (A mátrixhoz tartozó páros gráfban ez egy k csúcsból álló lefogó ponthalmaz.) Jelen esetben a 2., 4. és 5. oszlopok a 4. sorral lefedik az összes X-et, és négyen vannak; ez igazolja, hogy a bástyaelhelyezésünk valóban a lehető legnagyobb.

3. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is szedünk szét egy 54-lapos francia kártya csomagot 13 db 4 lapos csomagra, ki lehet választani mind a 13 csomagból egy-egy kártyát úgy, hogy csupa különböző értékű lapot válasszunk. (Egy lap értéke 13-féle lehet, mégpedig 2-től ászig.)

Megoldás: A G páros gráf csúcsai a 13 csomag ill. a 13 kártyaérték. Az egyes lapok az élek. Ekkor G 4-reguláris (nem feltétlenül egyszerű) gráf, ezért Kőnig élszínezési tétele miatt élkromatikus száma 4. Az élek tetsz. 4-színezésének bármelyik színosztálya megoldja a feladatot.

4. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. $0/1$-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Hogyan lehet a páros gráfunk egy e éléről eldönteni, kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban? Példa jobbra ill. $V = \{a,b,c,d,e,f,1,2,3,4,5,6\}$ és $E = \{a1, a2, a3, a4, b4, c4, c5, d2, d3, d4, d5, d6, e4, e5, f5\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Ha az e él duplán számít, akkor pontosan abban az esetben tud nagyobb párosítást eredményezni, ha van olyan maximális párosítás, mely tartalmazza e-t. Az e-t tartalmazó párosítást például úgy kereshetünk, ha e-t a végpontjaival együtt töröljük a G gráfból. Ha a maradékban van $\nu(G)-1$ méretű párosítás, akkor az G-ben az e-vel együtt $\nu(G)$ darab élt tartalmazó párosítás lesz, és mivel az e duplán számít, ez $\nu(G)+1$-nek számít. Ha nincs ilyen, akkor e-t csak legfeljebb $\nu(G)-1$ méretű párosítások tartalmazzák G-ben, tehát hiába számít duplán az e, úgy is csak $\nu(G)$-nek számít. De úgy is kereshetünk e-t tartalmazó párosítást, ha csak az e végpontjaiból induló, e-től különböző éleket töröljük, és az így kapott gráfban keresünk maximális párosítást (ebben persze benne lesz e). Ha itt is $\nu(G)$ méretűt találunk, akkor megéri az e-t duplán számolni.

5. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin úgy helyeztünk el kavicsokat, hogy egyetlen sorban és egyetlen oszlopban sincs 42-nél több kavics. Bizonyítsuk be, hogy a mezőkön elhelyezett kavicsok beoszthatók legfeljebb 42 csoportba úgy, hogy a kavicsok minden csoportban bástyaelhelyezést alkossanak.

Megoldás: A táblázat sorai ill. oszlopai a G páros gráf csúcsai, a kavicsok az élek. Kőnig élszínezési tétele szerint a kavicsok 42 színnel színezhetők, és minden színosztály egy bástyaelhelyezésnek felel meg.

6. Adott egy $0/1$ mátrix és abban kijelöltünk k db bástyaelrendezésben álló 1-est. Hogyan lehet eldönteni, hogy található-e $k+1$ db bástyaelrendezésben álló 1-es? Ha nincs, akkor hogyan lehet erre gyorsan bizonyítékot találni?

7. Egy 600 km^2-es szigeten 6 törzs és 6 teknősfaj él. Az egyes törzsek vadászterülete és a teknősök élőhelye egyaránt 100-100 km^2. A vadászterületek nem fedik egymást, és a teknősök élőhelyei sem, de a teknősök élőhelyei és a vadászterületek között nincs összefüggés. Mutasd meg, hogy a törzsek tudnak maguknak egy-egy egymástól különböző, a saját vadászterületükön előforduló teknőst választani totemállatnak!

Megoldás: Készítsünk egy páros G gráfot: az A csúcsosztályban a 6 törzs, a B-ben a hat teknősfaj legyenek a csúcsok, és legyen él egy törzs és egy teknősfaj közt, ha a teknőst a törzs választhatja totemállatnak (azaz előfordul a vadászterületén). Ha G-ben van teljes párosítás, az pont egy megfelelő választást jelent. Ellenőrizzük a Hall-tétel feltételét, miszerint akkor van az A csúcsosztályt fedő párosítás (ez $|A| = |B|$ miatt teljes lesz), ha minden $X \subset A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. Az $|X|$ darab törsz vadászterületei összesen $|X| \cdot 100\text{km}^2$-nyi élőhelyet fednek le, és egy ekkora területen legalább $|X|$-féle teknősnek elő kell fordulnia, mivel mindegyiknek az élőhelye legfeljebb 100km^2-ben fed át a kérdéses vadászterületekkel . Emiatt $|N(X)| \geq |X|$, tehát a Hall-tétel szerint fogunk találni megfelelő párosítást.

Feladatok

8. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztálya 100 csúcsot tartalmaz, és minden csúcs fokszáma legalább 50. Mutasuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

Megoldás: Legyen A az egyik, B a másik csúcsosztály. Ellenőrizzük a Hall-tétel feltételét, hogy van-e G-ben A-t fedő párosítás (ez $|A| = |B|$ miatt teljes lesz). Legyen $X \subset A$. Ha $|X| \leq 50$, akkor tetszőleges X-beli csúcsnak legalább 50 szomszédja van $N(X)$-ben, tehát $|N(X)| \geq 50 \geq |X|$. Ha $|X| \geq 51$, akkor $N(X) = B$, hiszen bármelyik $v \in B$ csúcsnak legalább 50 szomszédja van A-ban, és ezek közül legfeljebb $|A| - |X| \leq 49$ lehet X-en kívül. Tehát ebben az esetben $|N(X)| = |B| = 100 = |A| \geq |X|$. A Hall-tétel miatt valóban van teljes párosítás.

9. Egy laktanya tíz pontjára egy-egy kéttagú őrséget akar szervezni az őrvezető. Előtte minden katonától megkérdezi, melyik őrhelyekre menne szívesen. Keressünk jó (azaz pontos) feltételt arra, hogy mikor oszthatóak be úgy a katonák az őrségre, hogy mindenki neki szimpatikus helyre menjen.

Megoldás: Készítsünk páros gráfot, melyben az A színosztály csúcsai az őrhelyek, a B színosztályé a katonák, és akkor van él egy őrhely és egy katona közt, ha utóbbi hajlandó az előbbin posztolni. Nyilván szükséges, hogy az őrhelyek tetszőleges X halmazára legalább $2|X|$ katona jelentkezzen, azaz hogy $\forall X \subset A\colon\ |N(X)| \geq 2|X|$. Ha ez a feltétel teljesül, akkor viszont lehet is megfelelő beosztást találni. Készítsünk ugyanis egy G' gráfot, melynek B' csúcsosztálya ugyanúgy B, de az A' csúcsosztályában az A csúcsaiból két-két példány szerepel (ugyanazokkal a katonákkal összekötve, akik szívesen posztolnának a megfelelő őrhelyen). G'-ben kell A'-t fedő párosítást keresni. A Hall-tétel feltételét ellenőrizzük: ha $X \subset A'$, akkor az legalább $|X|/2$ ténylegesen különböző őrhelyet jelent, azokra viszont a feltételünk szerint legalább kétszer annyi, azaz legalább $|X|$ katona jelentkezett összesen, azaz $|N_{G'}(X)| \geq |X|$. A Hall-tétel szerint tehát található megfelelő beosztás.

10. **a)** Ki akarom színezni egy gráf csúcsait a lehető legkevesebb színnel. Az az ötletem, hogy keresek egy maximális független csúcshalmazt, kiszínezem pirosra, a színtelen csúcsok közt megint keresek egy max független csúcshalmazt, kiszínezem kékre stb. Mutassuk meg, hogy ez nem annyira szuper ötlet: előfordulhat, hogy egy G gráfnál így több mint $\chi(G)$ színt használunk. Sőt: van olyan G gráf, amelyet így mindenképpen több mint $\chi(G)$ színnel fogunk kiszínezni.
b) Mi a helyzet akkor, ha az éleket akarom hasonló módon színezni, mindig egy legnagyobb független élhalmazt keresve?

Megoldás: **a)** Adunk egy példát a „sőt"-re, az persze igazolja az első, gyengébb állítást is. Vegyünk egy háromszöget (K_3), majd minden oldalára rajzoljunk kifelé egy-egy újabb háromszöget. Az így kapott 6 csúcsú, 9 élű G gráfban $\alpha(G) = 3$, az egyetlen 3 méretű független csúcshalmaz a három külső csúcs. Ha ezeket kiszínezzük pirosra, összesen 4 színt fogunk használni, holott $\chi(G) = 3$.
b) Itt se jobb a helyzet. Vegyünk egy öt hosszú kört (C_5) az $1,2,3,4,5$ csúcsokon (ilyen sorrendben), és húzzuk be pl az 13 húrját. A kapott G gráfban $\nu(G) = 2$, és ha az első (piros) független élhalmazunk 12, 34, a második (kék) 23, 45, akkor innentől kezdve bajban leszünk, mert 4 szín fog kelleni, holott elég volna 3 is. A sőt-re példa: egy háromszög, és minden csúcsáról lógassunk le még egy-egy élt. Itt $\nu = 3$ és $\chi' = 3$, de ha az egyetlen három méretű párosítást pirosra színezzük, 4 szín fog kelleni.

11. Egy G gráfban mohón kerestünk egy tovább nem bővíthető P párosítást, azaz addig veszünk be éleket P-be ötletszerűen (csak arra figyelve, hogy függetlenek legyenek), amíg csak tudunk. Igazoljuk, hogy $|P| \geq \nu(G)/2$, azaz a mohó eljárás nem is annyira rossz, legalább az optimum felét biztosan eléri. Állíthatunk-e hasonlót, ha mohón keresünk független ponthalmazt?

Megoldás: A mohó eljárás pontosan akkor akad el, ha az eddig bevett $|P|$ darab él $2|P|$ darab végpontja lefogó ponthalmazt alkot (ha nem így volna, akkor egy nem lefogott élt hozzávehetnénk a párosításhoz). Ekkor viszont $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2|P|$,ami átosztva igazolja az állítást. Független ponthalmazzal akármilyen rosszul járhatunk: vegyünk azt az n csúcsú G gráfot, melyben egy csúcs az összes többivel szomszédos, és nincs más éle. Ekkor $\alpha(G) = n-1$, de ha az $n-1$ fokú csúcsot választjuk elsőként, akkor a mohó eljárás rögtön elakad.

12. Legyen $G(A,B;E)$ egy olyan páros gráf, amire $|A| = |B|$, továbbá minden $X \subset A$, $\emptyset \neq X \neq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|+1$. Mutassuk meg, hogy ekkor G tetszőleges e éléhez van olyan teljes (minden csúcsot fedő) párosítás, amiben e szerepel.

Megoldás: Dobjuk ki e-t és a két végpontját G-ből! A maradék G' gráfban A'-re teljesül a Hall-feltétel, hiszen $\forall\emptyset \neq X \subset A'$-re $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| - 1 \geq |X| + 1 - 1$, és persze $X = \emptyset$ sem problémás. G'-ben tehát van T.P., melyhez e-t hozzávéve G egy TP-át kapjuk.

13. A $G = (A, B; E)$ páros, egyszerű gráfban $|A| = |B| = n$, és $|E| \geq 10n + 1$. Mutassuk meg, hogy G-ben található 11 független él.

14. Egy ismerkedési esten a szervező páros beszélgetéseket szervez az egymást még nem ismerő résztvevők közt. Hosszas munkával készített egy beosztást, ahol néhány embernek ugyan nem jutott pár, de számukra addig kötetlen teázást ajánl fel. Ekkor megjelenik a segédje, és azt állítja, hogy lehetséges olyan beosztást is készíteni, ahol több páros beszélget, és mutat is egy példát. A szervező viszont makacsul ragaszkodik ahhoz, hogy akit már beosztott beszélgetésre, azt nem küldhetik teázni. Mutassuk meg, hogy a segédnek eme feltétel mellett is van esélye több párt összehozni.

15*. Tegyük fel, hogy (hurokmentes) G gráfnak m éle van, és $m = tk$. Mutassuk meg, hogy G élei pontosan akkor színezhetők ki jól k színnel úgy, hogy minden színosztály t élt tartalmaz, ha $\chi'(G) \leq k$.

Megoldás: Egyik irány: Ha kiszínezhető így k színnel, akkor definíció szerint $\chi'(G) \leq k$.
Másik irány: $\chi'(G) \leq k$ miatt ki tudjuk színezni G éleit jól k színnel. Ha van két színosztály, mondjuk a piros és a kék, melyek mérete legalább 2-vel eltér, mondjuk a piros élek javára, akkor átszínezéssel kiegyenlítjuk ezeknek a színosztályoknak a méretét az alábbi módon. Tekintsük a piros és kék élek által alkotott G' részgráfot. Itt minden csúcs foka legfeljebb kettő, és minden csúcsra legfeljebb egy kék, illetve piros él illeszkedik, tehát G' összefüggőségi komponensei a piros-kék színekben alternáló utak (esetleg izolált csúcsok) és körök. A körökben ugyanannyi piros él van, mint kék, tehát kell legyen olyan komponens, amelyik út, és több piros éle van, mint kék. Ez az út javító út a kék párosításra nézve, cseréljük hát meg az út mentén a piros és a kék színeket. Így ismét jó színezést kaptunk, de a piros élek száma eggyel csökkent, a kékeké eggyel nőtt. Ezt az eljárást ismételve elérhető, hogy bármely két színosztály mérete legfeljebb eggyel térhet el. A színosztályok átlagos mérete $m/k = t$, egész szám. Ha lenne olyan színosztály, ami nagyobb lenne az átlagosnál, akkor kellene legyen az átlagnál kisebb is; ezek mérete közt viszont legalább kettő volna a különbség, amit már kizártunk.