Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

2. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def.: *Párosítás* alatt független (azaz közös végpont nélküli) élhalmazt értünk. A G gráf egy U ponthalmaza *lefogó* tulajdonságú, ha G minden élére illeszkedik legalább egy U-beli csúcs. $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális száma, $\tau(G)$ pedig a G gráf lefogó ponthalamazai közül a legkisebb mérete.
Áll.: Minden G gráfban $\nu(G) \leq \tau(G)$. **Kőnig tétele:** ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.
Def.: Ha $P \subset E(G)$ egy párosítás G-ben, egy út *alternáló* P-re nézve, ha élei felváltva P-beliek és P-n kívüliek. Egy út *javító út (P-re nézve*, ha alternáló, és végpontjait nem fedi P.
Megfigyelés: ha van javító út P-re nézve, akkor az út P-beli éleit kidobjuk P-ből, a P-n kívülieket pedig bevesszük P-be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz.
Tétel: Legyen P egy párosítás G-ben. Ekkor $|P| = \nu(G)$ pontosan akkor teljesül, ha nincs G-ben javító út P-re nézve.
Javító utas algoritmus páros gráfokban. Tetsz. A és B színosztályokkal rendelkező páros gráf maximális méretű párosítását megkaphatujuk a javító utas algoritmus segítségével. Input: $G = (A,B;E)$ ps gráf, és egy $P \subset E$ párosítás. Output: egy maximális párosítás. Kiindulunk az P (akár üres) párosításból, és javító utat keresünk. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy P éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd valahogyan (pl BFS-sel) ellenőrizzük, hogy van-e irányított (egyszersmind alternáló) út egy A-beli fedetlen pontból egy B-beli fedetlenbe. 1) Ha van ilyen út, akkor az egy javító út, segítségével módosítjuk (növeljük) a P párosítást, majd újra keresünk javító utat. 2) Ha már nincs javító út, akkor az aktuális P párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Ez nyilvánvaló, ha P az A minden csúcsát fedi. Ha nem, P maximalitását alátámaszthatjuk így is: legyen $X \subset A$ és $Y \subset B$ az A-beli fedetlen csúcsok F halmazából alternáló úton elérhető csúcsok halmaza (vegyük észre: $F \subset X$, és $|P| = |A| - |F|$). Ekkor $(A \setminus X) \cup Y$ egy $|P|$ méretű lefogó ponthalmaz (mert nem lehet él X és $B \setminus Y$ közt), így $|P| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |P|$ miatt $\tau(G) = \nu(G) = |P|$.
Def.: Ha $G = (V,E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists u \in X, vu \in E\}$ az X ponthalmaz G-beli *szomszédsága*.
Megfigyelés: Egy $X \subset A$ csúcshalmazbeli csúcsok párjai minden párosításnál $N(X)$-ben vannak. Tehát ha $|N(X)| < |X|$, akkor nincs olyan párosítás, ami X minden csúcsát fedi (és így A csúcsait sem tudja maradéktalanul fedni).
Megfigyelés: Az előző, 2)-es eset gondolatmenetét folytatva $N(X) = Y$ adódik, és mivel $|N(X)| = |Y| = |X| - |F|$, ez igazolja, hogy tetszőleges párosítás esetén legalább $|F|$ darab X-beli csúcsnak nem lesz párja, tehát nincs $(|A| - |F|)$-nél nagyobb párosítás. Ebből az is következik, hogy ha nincs G-ben A-t fedő párosítás, azaz a fenti helyzetben $|F| \neq 0$, akkor $|N(X)| = |X| - |F| < |X|$.
Hall tétele: Tetsz. $G = (A,B;E)$ páros gráfban pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.
Megjegyzés.
(1) Páros gráf reprezentálható nemnegatív egészekből álló mátrixszal, ahol a sorok az egyik, az oszlopok a másik színosztálynak felelnek meg, és a mátrix elemei az adott sornak ill. oszlopnak megfelelő csúcsok között futó élek száma. A gráf párosítása olyan pozitív értékeket tartalmazó mezők kiválasztásának felel meg, amelyek bástyaelhelyezést alkotnak, azaz minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy kiválasztott mező van.
(2) Az alternáló utas algoritmussal tetszőleges $0/1$ mátrixban tudunk maximális számú, bástyaelhelyezésben álló 1-est találni. Minden lépésben vagy eggyel több egyest találunk, vagy megállapítjuk, hogy elértük a maximumot. Ehhez fedetlen (azaz 1-est nem tartalmazó) oszlopból fedetlen sorba kell eljutni felváltva vízszintesen és függőlegesen 1-esről 1-esre lépve úgy, hogy a kiválasztott és ki nem választott 1-esek felváltva következnek. Ha ez sikerül, akkor a lépcsőzetes út mentén cserékünk, és több bástyaelhelyezésben álló 1-est kapunk. Ha nem sikerül, akkor megkapjuk az oszlopok egy X halmazát, amire az X-beli 1-esek $|X| - k$ sort töltenek ki, ahol k a fedetlen oszlopok száma. Ezért tetsz. bástyaelhelyezés esetén legalább k oszlopban nem áll 1-es. Mi épp ilyet találtunk, vagyis megvan a maximum.

Gyakorlatok

1. Legyen $A = \{0,2,4,6,\ldots,16\}$ piros színnel (képzeletben), $B = \{-4,-3,-2,\ldots,4\}$ kék színnel (képzeletben), $E = \big\{\{a,b\} : a \in A, b \in B, b^2 \geq a\big\}$. Mekkora a legnagyobb párosítás mérete $G = (A,B;E)$-ben? Mutassunk olyan $X \subset A$ halmazt, melyre $|X|$ és $|N(X)|$ összehasonlítása igazolja, hogy az előzőleg adott érték valóban éppen $\nu(G)$. Igazoljuk a talált párosítás maximalitását úgy is, hogy keresünk egy ugyanakkora lefogó ponthalmazt.

2. A jobbra látható táblázatban álló X-ek közül legfeljebb hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott X-ek bástyaelhelyezést alkossanak? Mi köze ennek páros gráfok párosításaihoz?

	X		X		
	X			X	
			X	X	
X		X			X
	X			X	
			X		

3. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is szedünk szét egy 54-lapos francia kártya csomagot 13 db 4 lapos csomagra, ki lehet választani mind a 13 csomagból egy-egy kártyát úgy, hogy csupa különböző értékű lapot válasszunk. (Egy lap értéke 13-féle lehet, mégpedig 2-től ászig.)

4. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. $0/1$-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Hogyan lehet a páros gráfunk egy e éléről eldönteni, kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban? Példa jobbra ill. $V = \{a,b,c,d,e,f,1,2,3,4,5,6\}$ és $E = \{a1,a2,a3,a4,b4,c4,c5,d2,d3,d4,d5,d6,e4,e5,f5\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin úgy helyeztünk el kavicsokat, hogy egyetlen sorban és egyetlen oszlopban sincs 42-nél több kavics. Bizonyítsuk be, hogy a mezőkön elhelyezett kavicsok beoszthatók legfeljebb 42 csoportba úgy, hogy a kavicsok minden csoportban bástyaelhelyezést alkossanak.

6. Adott egy $0/1$ mátrix és abban kijelöltünk k db bástyaelrendezésben álló 1-est. Hogyan lehet eldönteni, hogy található-e $k+1$ db bástyaelrendezésben álló 1-es? Ha nincs, akkor hogyan lehet erre gyorsan bizonyítékot találni?

7. Egy 600 km^2-es szigeten 6 törzs és 6 teknősfaj él. Az egyes törzsek vadászterülete és a teknősök élőhelye egyaránt 100-100 km^2. A vadászterületek nem fedik egymást, és a teknősök élőhelyei sem, de a teknősök élőhelyei és a vadászterületek között nincs összefüggés. Mutasd meg, hogy a törzsek tudnak maguknak egy-egy egymástól különböző, a saját vadászterületükön előforduló teknőst választani totemállatnak!

Feladatok

8. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztálya 100 csúcsot tartalmaz, és minden csúcs fokszáma legalább 50. Mutasuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

9. Egy laktanya tíz pontjára egy-egy kéttagú őrséget akar szervezni az őrvezető. Előtte minden katonától megkérdezi, melyik őrhelyekre menne szívesen. Keressünk jó (azaz pontos) feltételt arra, hogy mikor oszthatóak be úgy a katonák az őrségre, hogy mindenki neki szimpatikus helyre menjen.

10. a) Ki akarom színezni egy gráf csúcsait a lehető legkevesebb színnel. Az az ötletem, hogy keresek egy maximális független csúcshalmazt, kiszínezem pirosra, a színtelen csúcsok közt megint keresek egy max független csúcshalmazt, kiszínezem kékre stb. Mutassuk meg, hogy ez nem annyira szuper ötlet: előfordulhat, hogy egy G gráfnál így több mint $\chi(G)$ színt használunk. Sőt: van olyan G gráf, amelyet így mindenképpen több mint $\chi(G)$ színnel fogunk kiszínezni.
b) Mi a helyzet akkor, ha az éleket akarom hasonló módon színezni, mindig egy legnagyobb független élhalmazt keresve?

11. Egy G gráfban mohón kerestünk egy tovább nem bővíthető P párosítást, azaz addig veszünk be éleket P-be ötletszerűen (csak arra figyelve, hogy függetlenek legyenek), amíg csak tudunk. Igazoljuk, hogy $|P| \geq \nu(G)/2$, azaz a mohó eljárás nem is annyira rossz, legalább az optimum felét biztosan eléri. Állíthatunk-e hasonlót, ha mohón keresünk független ponthalmazt?

12. Legyen $G(A,B;E)$ egy olyan páros gráf, amire $|A| = |B|$, továbbá minden $X \subset A$, $\emptyset \neq X \neq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|+1$. Mutassuk meg, hogy ekkor G tetszőleges e éléhez van olyan teljes (minden csúcsot fedő) párosítás, amiben e szerepel.

13. A $G = (A,B;E)$ páros, egyszerű gráfban $|A| = |B| = n$, és $|E| \geq 10n+1$. Mutassuk meg, hogy G-ben található 11 független él.

14. Egy ismerkedési esten a szervező páros beszélgetéseket szervez az egymást még nem ismerő résztvevők közt. Hosszas munkával készített egy beosztást, ahol néhány embernek ugyan nem jutott pár, de számukra addig kötetlen teázást ajánl fel. Ekkor megjelenik a segédje, és azt állítja, hogy lehetséges olyan beosztást is készíteni, ahol több páros beszélget, és mutat is egy példát. A szervező viszont makacsul ragaszkodik ahhoz, hogy akit már beosztott beszélgetésre, azt nem küldhetik teázni. Mutassuk meg, hogy a segédnek eme feltétel mellett is van esélye több párt összehozni.

15*. Tegyük fel, hogy (hurokmentes) G gráfnak m éle van, és $m = tk$. Mutassuk meg, hogy G élei pontosan akkor színezhetők ki jól k színnel úgy, hogy minden színosztály t élt tartalmaz, ha $\chi'(G) \leq k$.