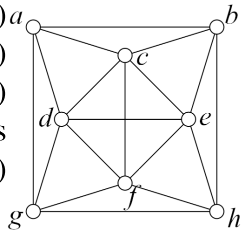
Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

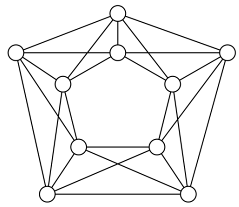
1. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Gyakorlatok

1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma?

Megoldás:
Első gráf: az órán tanultak miatt $\chi(G) \geq \omega(G)$, azaz a kromatikus számra alsó becslés a maximális klikkméret. (1 pont)
A G gráf „középső” négy csúcsa egy 4-pontú klikket alkot, ezért $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$, tehát a legalább 4 szín szükséges G színezéséhez. (4 pont)
Az ábrán látható a G gráf egy 4 színnel történő színezése, (3 pont)
azaz $\chi(G) \leq 4$. (1 pont)
Ezt az előző becsléssel összevetve $\chi(G) = 4$ adódik a kromatikus számra. (1 pont)





Megoldás:
Második gráf: láthatóan van K_4 részgráf, így $\omega(G) \geq 4$. Próbáljuk meg kiszínezni négy színnel. Az óramutató járásának megfelelően nézzük meg az öt darab csúcspárt, melyeket a „belső ötszög” és a „külső ötszög” megfelelő csúcsai alkotnak (minden ilyen pár két éllel összekötött csúcsból áll). Az első pár két csúcsa legyen mondjuk piros és kék (mindegy, milyen leosztásban). A következő pár két csúcsa az előző párral egy K_4-et alkot, tehát ezeknek kell két új szín, mondjuk zöld és sárga. Ha csak ezt a négy színt akarjuk használni, akkor a következő pár ugyanilyen érveléssel ismét p, k színű lesz, a következő z, s stb, más lehetőség nincs. Viszont így sem lehet az összes csúcsot megszínezni, tehát $\chi(G) \geq 5$. Öt szín viszont elég, pl színezzük körbe a belső ötszög csúscait $1, \ldots 5$ színekkel, és a külső ötszögét is, csak az utóbbinál kettővel odábbi csúcsból indulva.

2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?

Megoldás:
Az órán tanult mohó színezés során a soron következő csúcs mindig az első olyan színt kapja, ami különbözik a már korábban kiszínezett szomszédai színétől. (4 pont)
A megadott sorrendben ilyen módon kiszínezve a csúcsokat az ábrán látható színezést kapjuk. (4 pont)
A színezéshez tehát három színre volt szükség, (1 pont)
és a h csúcs az 1-es színt kapja. (1 pont)

3. Mennyi az n csúcsú kör (C_n) élkromatikus száma?

Megoldás:
Páros n-re 2, páratlanra 3 (könnyű).

4. Legyen a G gráf V csúcshalmaza azon (x, y) rácspontok (egész koordinátájú pontok) halmaza a síkon, melyekre $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 1$ is teljesül, és pontosan akkor legyen él G-ben valamely (x, y) és (x', y') V-beli csúcsok között, ha $|x - x'| \leq 1$. Mennyi $\chi'(G)$?

Megoldás:
Legalább 5, mert van 5 fokú csúcsa. Ennyi elég is: (a kézenfekvő diagramon) a vízszintes élekre elég 2 szín, a többit pedig meredekségük alapján színezzük 3 színnel.

5. Bizonyítsuk be, hogy (véges, egyszerű) gráfra $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$.

Megoldás:
Színezzük G csúcsait $\chi(G)$ színnel jól. Minden színosztály független, tehát legfeljebb $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz. Így a $\chi(G)$ színosztály együtt legfeljebb $\chi(G)\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz, tehát $|V(G)|$ nem lehet ennél több.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel. Mutassunk példát olyan $2n$ csúcsú G páros gráfra, aminek a mohó színezéséhez n színre lehet szükség.

   Megoldás:
   Színezzük ki G csúcsait az $1,2,\ldots,\chi(G)$ színekkel, és a kapott színek növekvő sorrendjében színezzük mohón G csúcsait. Ezáltal tetsz. csúcs színe legfeljebb a kiindulási színezés szerinti színe lesz, tehát nem használunk $(\chi(G)+1)$-dik színt.

   A $K_{n,n}$ teljes páros gráfból egy élt elhagyva és az elhagyott éleken sorban haladva a mohó színezéssel épp ilyen példát kapunk.

7. Tegyük fel, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf minden fokszáma 42. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.

   Megoldás:
   A Vizing-tétel miatt a válasz 42 vagy 43. Ha 42 volna, akkor minden színosztály teljes párosítás lenne, ami 99 csúcsú gráfon nem lehetséges. Ezért $\chi'(G)=43$.

8. Bergengóciában néhány regionális rádiócsatorna szeretne frekvenciát kapni műsorainak sugárzásához. A Bergengóc Kommunikációs Hatóság (BKH) felügyeli a frekvenciák kiosztását. Hogy ne zavarják egymást, két műsor akkor sugározható ugyanazon a frekvencián, ha a műsorszóró állomásaik legalább 200 km-re vannak egymástól. A BKH szeretné a lehető legkevesebb frekvenciát használni. Adjunk gráfelméleti modellt a minimálisan szükséges frekvenciák számának meghatározásához. (Minden műsort pontosan egy állomásról szeretnénk sugározni.)

   Megoldás:
   Készítsünk gráfot. A csúcsok legyenek a sugározandó műsorok, és akkor legyen él két csúcs között, ha a megfelelő műsorszóró állomások távolsága kevesebb, mint 200 km. A kapott gráf jó színezése engedélyezhető frekvenciakiosztásnak felel meg (a színek a frekvenciák), tehát a kromatikus száma éppen a minimálisan szükséges frekvenciák száma.

9. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

   Megoldás:
   A huszár világos és sötét mező között lép, ezért G ps, $\chi=2$. A bástya gráfjában minden oszlop és sor K_8-at alkot, tehát $\chi(G)\geq\omega(G)\geq 8$. Az első oszlopot színezzük föntről lefelé az $1,2,\ldots,8$ színekkel, a másikat ugyanígy, csak egy mezővel lejjebbről indulva, és a 8-as szín a legfölső mezőre kerül (tehát eggyel lejjebb toljuk a színezést, ciklikusan), a következő oszlopnál még eggyel eltolva színezünk így stb, tehát 8 szín elég is, így $\chi(G)=8$. A futó gráfjának két izomorf komponense van, mindegyik a bástyagráf egy részgráfja. tehát 8 szín elég (és az átlók miatt kell is). A király gráfjában $\omega\geq 4$ (egy 2×2-es kis négyzet), de 4 szín elég, soronként 2-t használva, felváltva.

10. Van-e olyan gráf, amiben nincs K_3 klikk, de G nem színezhető ki 2 színnel? Hát olyan, melyben nincs K_4 klikk, de mégsem színezhető ki 3 színnel?

    Megoldás:
    Persze, pl egy C_5, illetve egy C_5 plusz egy mindenkivel szomszédos új csúcs.

11. Legyen $V(G)=\{1,2,3,\ldots,100\}$, és legyen $ij\in E(G)$, ha $|i-j|\leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

    Megoldás:
    G-ben van K_8, szóval $\chi\geq 8$. De 8 szín elég is, ciklikusan.

12. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G)=\max\{\chi(K),\chi(H)\}$ ill. $\chi(G')=\chi(H)+\chi(K)$.

    Megoldás:
    Triviális a definícióból, a másodikhoz meg a H-n és a K-n különböző színeket kell használni.

13. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)|\geq\binom{\chi(G)}{2}$.

    Megoldás:
    Bármely két színosztályok között fut legalább egy él, különben kevesebb szín is elég volna.

14. Maximum mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?

Megoldás:
Tegyük fel, hogy a G gráf legfeljebb 100 élű, és a lehető legkevesebb színnel van kiszínezve. Ekkor bármely két színosztály között kell élnek vezetnie, ugyanis ha két színosztály csúcsai között nem vezetne él, akkor e két színosztály csúcsait közös színnel színezve a kromatikus számánál eggyel kevesebb színnel tudnánk G-t kiszínezni, ami lehetetlen. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy ha k színosztály van a színezésben, akkor G-nek legalább $\binom{k}{2}$ éle kell legyen, így $100 \geq \binom{k}{2}$ (3 pont)
Mivel $\binom{15}{2} = 15 \cdot 7 = 105 > 100$, ezért a kromatikus szám 15-nél bizonyosan kisebb. (2 pont)
A 14 viszont elérhető, pl K_{14} megfelel. (1 pont)
A feladat kérdésére tehát 14 a válasz. (1 pont)

15. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?

Megoldás:
A színosztályok között minden élt be kell húzni. Akkor van ebből a legtöbb, ha a színosztályok mérete legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Ezzel is azt sulykoljuk, hogy nem szivárványos ábrákra, hanem színosztályokra érdemes gondolni.

16. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G-e) < 3$ $\forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G-v) < 3$ $\forall v \in V$?

Megoldás:
A G nem páros, de bármely él/csúcs elhagyásától az lesz. Szóval G-nek van ptn köre, de él/csúcstörlés után már nem lesz. Vagyis minden él/csúcs ptn körhöz tartozik. Tehát G egy ptn kör, és az első esetben még lehetnek izolált pontjai is.

17. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy e élt az egyszerűség megtartásával, $\chi(G) < \chi(G+e)$ teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés G színezéséhez minden esetben $\chi(G)$ színt használ.

Megoldás:
Ekkor minden lehetséges él be van húzva G színosztályai között, azaz G egy teljes k-részes gráf. Ezeken a mohó mindig ugyanúgy színez.

18. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1-1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k+1$ teljesül.

Megoldás:
Klikkméret nem tud nőni, mert az új pontokon nincs háromszög. G minden egyes példányához k szín kell, és lesz olyan új pont, aminek mind a k színből van szomszédja, tehát k szín nem elég G'-re. Ha pedig az új pontokat azonos színnel színezzük, akkor elég $k+1$ szín.

19. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.

Megoldás:
Az előző feladatból közvetlenül következik. Tetszőleges gráfból indulhatunk, melyre $\omega(G) = 2$, például egyetlen élből.

20. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (*)

Megoldás:
Mivel az azonos színűre színezett csúcsok nem alkotnak páratlan kört, ezért a piros csúcsok is és a zöld csúcsok is páros gráfot feszítenek G-ben. (4 pont)
Ezek szerint az eredetileg piros csúcsokat ki lehet színezni két színnel (mondjuk tulipirossal és karmazsinnal) úgy, hogy egyetlen élnek se legyen mindkét végpontja tulipiros vagy karmazsin. (3 pont)
Hasonlóan, az eredetileg zöldre színezett csúcsok kiszínezhetők a keki és libazöld színekre úgy, hogy

egyetlen élnek se legyen azonos zöld árnyalatú a két végpontja. (1 pont)

Mivel a G gráf csúcsait a fentiek szerint 4 színnel színeztük úgy, hogy minden él különböző színű csúcsokat köt össze, ezért G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (2 pont)

21. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$. (*)

Megoldás:

Bármely két színosztály egy páros gráfot feszít. Ha ez nem volna összefüggő, akkor az egyik komponensben fölcserélve a színeket egy lényegesen eltérő színezést kapnánk. Tehát bármely két színosztály öf gráfot feszít, így élszáma legalább csúcsszáma mínusz 1. Innen egyszerű: ha a három színosztály mérete a, b és c, akkor egyrészt $a+b+c=n=|V(G)|$, másrészt színosztálypáronként becsülve az élek számát, az előzőek alapján ezek közt kell legyen legalább $(a+b-1)+(a+c-1)+(b+c-1)=2n-3$ él. Amúgy Kürschák példa volt.