

Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

1. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G egyszerű gráf csúcsainak egy k -színezésén az $1, 2, \dots, k$ színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. (Formálisan, egy olyan $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ függvény, amire $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.) Egy (k) -színezésben az azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztálynak* nevezzük. (Színosztályon belül G -nek nem futhat éle.) A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$ -gyel nem.

Megfigyelés: Ha G k -színezhető, akkor G -ben nincs hurokél. A párhuzamos élek nem zavarnak. Gráfok csúcsainak színezésekor feltehető, hogy a gráf egyszerű.

Def: A G gráf *páros*, ha G 2-színezhető, azaz ha $\chi(G) \leq 2$.

Tétel: (A G gráf páros) \iff (G -ben nincs páratlan kör)

Def: A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G -ben van k páronként szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.)

Def: A G gráf csúcsainak U részhalma *független pontthalmaz* ha U nem feszít élt, azaz U -nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független pontthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli, azaz $\alpha(G) = k$, ha van G -nek k páronként nem szomszédos pontja, de $k+1$ nincs.

Megfigyelés: Ha G egyszerű, akkor $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$.

Állítás: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Mohó színezés: G csúcsait egy rögzített sorrendben kiszínezzük úgy, hogy a soron következő csúcs az első olyan színt kapja, ami nem különbözik a korábban kiszínezett szomszédai színétől.

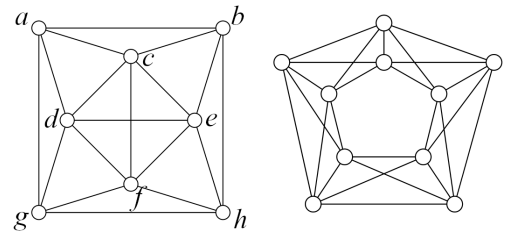
Brooks tétele: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Állítás: Ha G véges gráf akkor $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing-tétel: Ha G egyszerű és véges, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Shannon tétele: Tetsz. véges G gráfra $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

Gyakorlatok



- Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma?
- Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?
- Mennyi az n csúcsú kör (C_n) élkromatikus száma?
- Legyen a G gráf V csúcshalmaza azon (x, y) rácspontok (egész koordinátájú pontok) halmaza a síkon, melyekre $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 1$ is teljesül, és pontosan akkor legyen él G -ben valamely (x, y) és (x', y') V -beli csúcsok között, ha $|x - x'| \leq 1$. Mennyi $\chi'(G)$?
- Bizonyítsuk be, hogy (véges, egyszerű) gráfra $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$.
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel. Mutassunk példát olyan $2n$ csúcsú G páros gráfra, aminek a mohó színezéséhez n színre lehet szükség.
- Tegyük fel, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf minden fokszáma 42. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
- Bergengóciában néhány regionális rádiócsatorna szeretne frekvenciát kapni műsorainak sugárzásához. A Bergengóc Kommunikációs Hatóság (BKH) felügyeli a frekvenciák kiosztását. Hogy ne zavarják egymást, két műsor akkor sugározható ugyanazon a frekvencián, ha a műorszóró állomásaik legalább 200 km-re vannak egymástól. A BKH szeretné a lehető legkevesebb frekvenciát használni. Adjunk gráfelméleti modellt a minimálisan szükséges frekvenciák számának meghatározásához. (Minden műsort pontosan egy állomásról szeretnénk sugározni.)
- A G gráf csúcsait a sakktabla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
- Van-e olyan gráf, amiben nincs K_3 klikk, de G nem színezhető ki 2 színnel? Hát olyan, melyben nincs K_4 klikk, de mégsem színezhető ki 3 színnel?

11. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
12. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G -ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
13. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
14. Maximum mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?
15. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?
16. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3 \forall e \in E$? Milyen n -csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3 \forall v \in V$?
17. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy e élt az egyszerűség megtartásával, $\chi(G) < \chi(G + e)$ teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés G színezéséhez minden esetben $\chi(G)$ színt használ.
18. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felvesszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából 1 – 1 szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$ teljesül.
19. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.
20. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G -nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (*)
21. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$. (*)