

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09) tematika és vizsgatájékoztató

2024 tavasz

Tematika

- Gráfszínezések.** Jó csúcsszínezés, kromatikus szám, független csúcshalmazok. Alsó becslés részgráfokkal, speciálisan a gráf klikkszámával. Felső becslés a maximális fokszám függvényében: mohó színezés, Brooks-tétel (nem biz). Páros gráfok definíciója színezéssel, ekvivalens jellemzésük körökkel (G pontosan akkor páros, ha nincs benne páratlan kör). Jó élszínezések, élkromatikus szám. Alsó és fölcső becslések a maximális fokszám függvényében: triviális alsó becslés, Vizing-tétel (nem biz.), Shannon-tétel (nem biz). Kőnig élszínezési tétele páros gráfok élkromatikus számáról.
- Párosítások.** Párosítás, lefogó ponthalmaz fogalma, $\nu(G) \leq \tau(G)$. Javító út, párosítás növelése javító úttal. Egy párosítás pontosan akkor maximális, ha nincs rá nézve javító út. Párosítások páros gráfban: javító utak keresése alkalmas irányítás segítségével, a gráf szerkezete maximális párosítás alapján. Kőnig-tétel (páros G gráfra $\nu(G) = \tau(G)$), Hall-tétel (páros gráfan akkor és csak akkor van az A csúcsosztály minden csúcsát fedő párosítás, ha $\forall X \subset A$ -ra $|N(X)| \geq |X|$, ahol $N(X)$ az X -beli csúcsok szomszédainak halmaza). A javító utas algoritmus páros gráfok mátrixrepresentációjában.
- Súlyozott párosítások, a magyar módszer.** Súlyozott párosítás, súlyozott lefogás fogalma. Páros gráfok maximális súlyú párosításának keresése visszavezethető nemnegatíván élsúlyozott teljes páros gráfok maximális súlyú teljes párosításának keresésére. Minden (nemnegatíván) élsúlyozott gráfban minden párosítás összsúlya legfeljebb annyi, mint tetszőleges súlyozott lefogás összsúlya ($\max \leq \min$). Egerváry tétele (nemnegatíván élsúlyozott páros gráfban egy maximális súlyú párosítás összsúlya egyenlő egy minimális súlyozott lefogás összsúlyával, azaz $\max = \min$). A magyar módszer teljes páros gráfok maximális súlyú teljes párosításának és minimális súlyú lefogásának keresésére.
- Hálózati folyamatok, vágások.** Hálózat, folyam, folyam nagysága, vágás, vágás kapacitása, kapcsolatuk. Ford–Fulkerson-tétel (MFMC: a maximális folyam nagyság egyenlő a minimális vágáskapacitással). Javító utas eljárás maximális folyam és minimális vágás keresésére. A folyamprobléma néhány általánosítása (irányítatlan élek, csúscapacitások, több termelő / fogyasztó), visszavezetésük az eredeti változatra. Egészértékűségi lemma. Gyakorlaton volt: alkalmazás páros gráfok párosításaira (másik bizonyítás a Kőnig-tételre).
- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek.** Lineáris egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek. Fourier–Motzkin-elimináció: változók kiküszöbölése úgy, hogy az eredeti rendszer megoldhatósága és az új rendszer megoldhatósága ekvivalens (az egyik rendszer összes megoldása előállítható a másik rendszer megoldásaiból). Ha az FM-elimináció során tilos sort kapunk, akkor az előáll a kibővített együtthatómátrix sorainak nemnegatív együttműködésű lineáris kombinációjaként. Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixos alakja. Farkas-lemma.
- Lineáris programozás.** Lineáris programozási (LP) feladat (feltételek, célfüggvény), geometriai interpretáció két ismeretlen esetén (megoldáshalmaz alakja, célfüggvény értelmezése), optimális megoldás keresése. Lineáris programozás sztenderd alakja. Lineáris feltételeket kielégítő megoldás létezésének és a célfüggvény korlátosságának vizsgálata, alternatív egyenlőtlenségrendszerek felírása a Farkas-lemma alapján. A dualitástétel. LP-hez duális LP felírása (számárvezetővel, általánosított sztenderd alakra nem volt biz.).
- Egészértékű lineáris programozás.** Egészértékű lineáris programozási (IP) feladat (feltételek, célfüggvény). Az IP feladat LP relaxáltja, kapcsolat az IP és LP megoldások, illetve optimumok között. Teljesen unimoduláris (TU) mátrixok. Átalakítások, melyek TU mátrixból TU mátrixot állítanak elő. Irányított és irányítatlan mátrixok incidencia (csúcs-él illeszkedési) gráfja, ezek TU volta. Egészértékű (optimális) megoldás létezése TU feltétel-mátrix esetén (nem biz.). Egerváry tételének igazolása IP segítségével (páros gráfbeli max súlyú teljes párosítás és min súlyú súlyozott lefogás kapcsolatáról). Az LP és az IP feladatok nehézsége (nem biz.).
- Többszörös összefüggőség.** Hálózatok lokális (két csúcs viszonylatában értelmezett) és globális megbízhatóságának mérőszámai csúcs- vagy éltörléssel összefüggésben, kapcsolat pontdiszjunk, illetve éldiszjunk utakkal, Menger tételei. Gráfok (pont)összeüggőségi és élösszeüggőségi száma, vágások. Elvágó élek, 2-komponensek,

izolált, levél és belső komponensek, a 2-komponensek és elvágó élek erdője. Elvágó pontok, blokkok, maxblokkok, izolált és levél blokkok, a $T_2(G)$ gráf. Gráfok kétszeresen (él)összefüggővé tételéhez szükséges minimális élek száma (vázlatos biz.). Maxvissza sorrend, lemma az utolsó két csúcs lokális élösszefüggőségéről (nem biz), gráf élösszefüggőségének meghatározása (Nagamochi-Ibaraki-algoritmus). Karger randomizált algoritmus minimális költségű vágás keresésére.

9. **Többszörösen összefüggő gráfok struktúrája.** Kétszeresen (él)összefüggő gráfok szerkezete, fülfelbontásuk. Egy gráf pontosan akkor kétszeresen (él)összefüggő, ha van megfelelő fülfelbontása. Robbins tétele irányítatlan gráfok erősen összefüggő irányításának létezéséről (gyakorlaton bizonyítottuk). Lovász leemelési tétele, csúcsok teljes leemelése, $2k$ -élösszefüggő gráfok előállítása (élek behúzása, összecsípése).
10. **Approximációs algoritmusok, ütemezési, pakolási feladatok.** Approximációs algoritmusok: abszolút (additív) és relatív (multiplikatív) hiba, példák. Halmazfedési feladat, mohó eljárás a megoldására, a mohó eljárás hibája. Ütemezési feladatok, optimalizálandó célfüggvények, átfutási idő minimalizálása egy gépre (triviális), két gépre (reménytelen). SPT sorrend optimalitása az átlagos befejezési időre egy gépen. Listás ütemezés (LS) relatív hibája általános (nem biz), illetve LPT sorrend esetén (nem biz). Ládapakolás, FF és FFD algoritmus, ezek relatív hibája (nem biz). IP modell a halmazfedési problémára, illetve a két gépes ütemezés (teljes) átfutási idejének meghatározására (a diákon nem szerepel).

Vizsgatájékoztató

A vizsga szóbeli. A kihúzott tétel kidolgozására (papíron) 20-30 perc áll rendelkezésre, ezután kezdődik a szóbeli felelet. Az elégséges jegy feltétele az előadáson elhangzott összes témakör és a főbb tételek értő ismerete, valamint az alapvető összefüggések átlátása (pontosabban azoké, melyek a vizsgán szóba kerülnek). Jobb jegyért a kurzus során elhangzott bizonyítások minél gördülékenyebb ismertetése szükséges (jeles: az összes bizonyítás megy szinte segítség nélkül; jó: érdemi segítség kell a bizonyításokhoz, vagy egy nehezebb bizonyítás nem megy, de a többi rendben van; közepes: könnyebb bizonyítások (kis segítséggel) mennek, nehezebbek nem). A felelet során szűrőpróbaszerű kérdéseket föltehetek a tananyag egészéből (definíciók, tételek, alapvető összefüggések), valamint a vizsgán elhangzottakkal kapcsolatban is. A ZH-k által le nem fedett anyagrészből biztosan kap kérdést minden vizsgázó. A vizsga eredményeképpen a zárthelyi dolgozatokon nyújtott teljesítményre kapott megajánlott jegy módosulhat, annál legföljebb eggyel jobb érdemjegy szerezhető (vagy akármennyivel rosszabb).

A vizsgán szokásos hétköznapi ruházat viselése tökéletesen megfelelő, nem szükséges alkalmi öltözetben megjelenni (persze nem is tilos, ha valaki ettől jobban érzi magát; az osztályzatot mindenesetre nem befolyásolja). Én nem leszek kiöltözve.