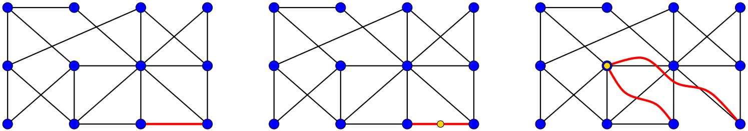
Kombinatorikus optimalizálás

Gráfélek leemelése, $2k$-élösszefüggő gráfok előállítása

2023. május 23.

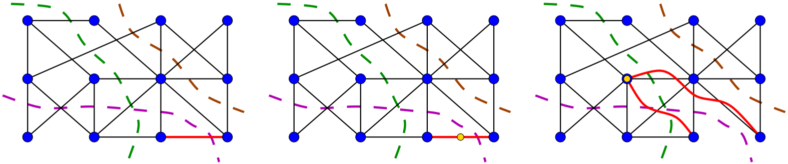
Bevezetés

A mai órán egy speciális gráfoperációt és annak alkalmazásait fogjuk vizsgálni. Egy *e* él **felemelése** az *e* felosztása és a keletkező osztópont egy korábbi csúcsba olvasztását jelenti. Az így keletkező élpár **leemelése** pedig ennek az élfelemelésnek fordítottja.



Bevezetés

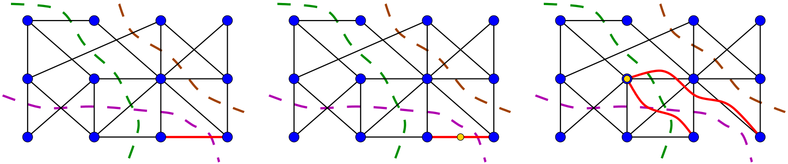
A mai órán egy speciális gráfoperációt és annak alkalmazásait fogjuk vizsgálni. Egy e él **felemelése** az e felosztása és a keletkező osztópont egy korábbi csúcsba olvasztását jelenti. Az így keletkező élpár **leemelése** pedig ennek az élfelemelésnek fordítottja.



A gráf vágásainak mérete sem egy él felosztásától, sem pedig az osztópontnak egy másik csúcsba olvasztásától nem csökkenhet. Élek felemelésével a vágások mérete tehát nem csökken, élpárok leemelésével pedig nem növekszik.

Bevezetés

A mai órán egy speciális gráfoperációt és annak alkalmazásait fogjuk vizsgálni. Egy *e* él **felemelése** az *e* felosztása és a keletkező osztópont egy korábbi csúcsba olvasztását jelenti. Az így keletkező élpár **leemelése** pedig ennek az élfelemelésnek fordítottja.



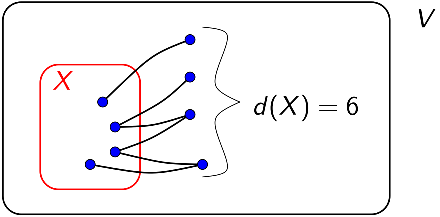
A gráf vágásainak mérete sem egy él felosztásától, sem pedig az osztópontnak egy másik csúcsba olvasztásától nem csökkenhet. Élek felemelésével a vágások mérete tehát nem csökken, élpárok leemelésével pedig nem növekszik.
Olyan leemeléseket fogunk keresni, amelyektől a minimális vágás mérete (a maradék csúcshalmazon) nem csökken. Hasznos lesz ehhez a gráfok vágásfüggvényéről szóló néhány egyenlőtlenség.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ ponthalmaz esetén $d(X)$ az X-ből kilépő élek számát, $X,\ Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y)$az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek számát jelenti.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ ponthalmaz esetén $d(X)$ az X-ből kilépő élek számát, $X,\ Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y)$az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek számát jelenti.



A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ ponthalmaz esetén $d(X)$ az X-ből kilépő élek számát, $X,\ Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y)$az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek számát jelenti.

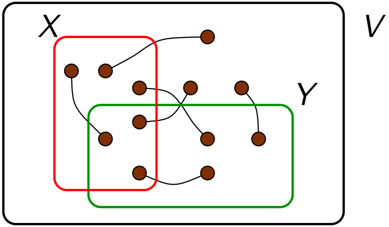
A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ ponthalmaz esetén $d(X)$ az X-ből kilépő élek számát, $X, \ Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y)$az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek számát jelenti.
Ekkor tetsz. $X, Y \subset V$ ponthalmazokra teljesülnek az alábbiak.
(1) $d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X \setminus Y, Y \setminus X) = d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X) + 2d(X \cap Y, (V \setminus (X \cup Y))$
(2) $d(X) + d(Y) \geq d(X \cap Y) + d(X \cup Y)$ ill.
(3) $d(X) + d(Y) \geq d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X)$.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ ponthalmaz esetén $d(X)$ az X-ből kilépő élek számát, X, $Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y)$az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek számát jelenti. Ekkor tetsz. $X, Y \subset V$ ponthalmazokra teljesülnek az alábbiak.
(1) $d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X \setminus Y, Y \setminus X) = d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X) + 2d(X \cap Y, (V \setminus (X \cup Y))$
(2) $d(X) + d(Y) \geq d(X \cap Y) + d(X \cup Y)$ ill.
(3) $d(X) + d(Y) \geq d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X)$.

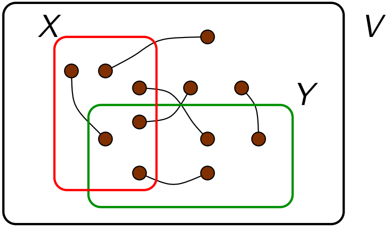
Biz: (1) G minden éle ugyanannyival járul hozzá mindhárom formulához.
(2,3) Közvetlenül adódik (1)-ből, az utolsó tag elhagyásával. □



A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ ponthalmaz esetén $d(X)$ az X-ből kilépő élek számát, $X, \; Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y)$az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek számát jelenti. Ekkor tetsz. $X, Y \subset V$ ponthalmazokra teljesülnek az alábbiak.
(1) $d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X \setminus Y, Y \setminus X) = d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X) + 2d(X \cap Y, (V \setminus (X \cup Y))$
(2) $d(X) + d(Y) \geq d(X \cap Y) + d(X \cup Y)$ ill.
(3) $d(X) + d(Y) \geq d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X)$.

Biz: (1) G minden éle ugyanannyival járul hozzá mindhárom formulához.
(2,3) Közvetlenül adódik (1)-ből, az utolsó tag elhagyásával. $\square$



A Lemma (2) részének neve **szubmoduláris egyenlőtlenség**.

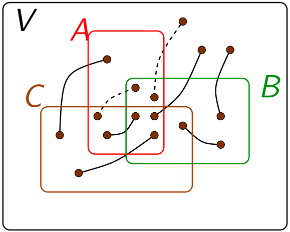
A hármas egyenlőtlenség

Tétel: Tetsz. ir.tatlan $G = (V, E)$ gráf és $A, B, C \subseteq V$ esetén $d(A) + d(B) + d(C) \geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (B \cup A)) + 2d(A \cap B \cap C, V - (A \cup B \cup C))$.

A hármas egyenlőtlenség

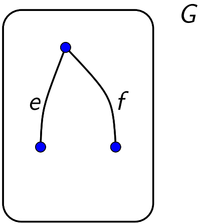
Tétel: Tetsz. ir.tatlan $G = (V, E)$ gráf és $A, B, C \subseteq V$ esetén $d(A) + d(B) + d(C) \geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (B \cup A)) + 2d(A \cap B \cap C, V - (A \cup B \cup C))$.

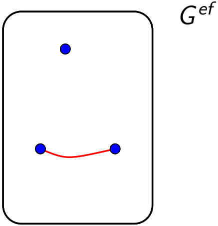
Biz: A szubmod. egyenlőtlenség igazolásához hasonlóan itt is az egyes éltípusok hozzájárulását kell vizsgálni a két oldalhoz. Az ábra (szimmetria erejéig) tartalmazza az összes érdekes éltípust. A folytonos élek hozzájárulása mindkét oldalhoz ugyanannyi, a szaggatottak a bal oldalba beszámítanak, a jobb oldalba nem. $\square$



Lovász leemelési tétele

Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor
$G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.





Lovász leemelési tétele

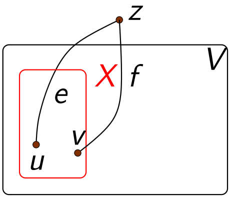
Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor $G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.

Lovász leemelési tétele

Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor
$G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.
Tétel: Ha $G = (V + z, E)$, $2 \mid d(z)$, $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2\ \forall x, y \in V$,
akkor $\forall e = zu \in E\ \exists f = zv \in E:\ \lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k\ \forall x, y \in V$.

Lovász leemelési tétele

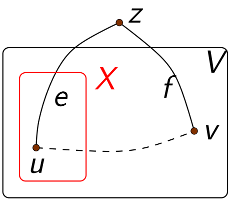
Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor
$G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.
Tétel: Ha $G = (V + z, E)$, $2 \mid d(z)$, $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2\ \forall x, y \in V$,
akkor $\forall e = zu \in E\ \exists f = zv \in E:\ \lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k\ \forall x, y \in V$.
Biz: Az $X \subsetneq V$ halmaz **veszélyes**, ha $u \in X$ és $d(X) \leq k + 1$.
$f = zv$-re (e, f) nem leemelhető $\iff$ $\exists X \ni v$ veszélyes halmaz.



Lovász leemelési tétele

Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor $G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.
Tétel: Ha $G = (V + z, E)$, $2 \mid d(z)$, $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2$ $\forall x, y \in V$, akkor $\forall e = zu \in E$ $\exists f = zv \in E$: $\lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k$ $\forall x, y \in V$.
Biz: Az $X \subsetneq V$ halmaz **veszélyes**, ha $u \in X$ és $d(X) \leq k + 1$.
$f = zv$-re (e, f) nem leemelhető $\iff$ $\exists X \ni v$ veszélyes halmaz.

$\boxed{\textbf{I.}}$ Ha van olyan $f = zv$ él, amire v-t nem tartalmazza veszélyes halmaz, akkor ef leemelhető.
Megmutatjuk, hogy biztosan ez az eset valósul meg.



Lovász leemelési tétele

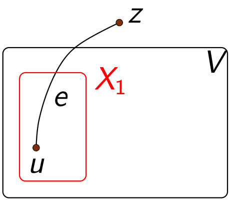
Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor $G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.

Tétel: Ha $G = (V + z, E)$, $2 \mid d(z)$, $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2$ $\forall x, y \in V$, akkor $\forall e = zu \in E$ $\exists f = zv \in E$: $\lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k$ $\forall x, y \in V$.

Biz: Az $X \subsetneq V$ halmaz **veszélyes**, ha $u \in X$ és $d(X) \leq k + 1$.
$f = zv$-re (e, f) nem leemelhető $\iff$ $\exists X \ni v$ veszélyes halmaz.

$\boxed{\textbf{II.}}$ Tfh $N(z) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} X_i$, ahol minden X_i veszélyes és ℓ minimális.

$\boxed{\text{a}}$ Ha $\ell = 1$, akkor $k + 1 \geq d(X_1) = d(V - X_1) + d(z) \geq k + 2$, ellentmondás.

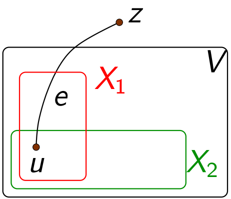


Lovász leemelési tétele

Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor $G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.
Tétel: Ha $G = (V + z, E)$, $2 \mid d(z)$, $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2 \ \forall x, y \in V$, akkor $\forall e = zu \in E \ \exists f = zv \in E : \ \lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k \ \forall x, y \in V$.

Biz: Az $X \subsetneq V$ halmaz **veszélyes**, ha $u \in X$ és $d(X) \leq k + 1$.
$f = zv$-re (e, f) nem leemelhető $\iff$ $\exists X \ni v$ veszélyes halmaz.

$\boxed{\textbf{II.}}$ Tfh $N(z) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} X_i$, ahol minden X_i veszélyes és ℓ minimális.



$\boxed{\text{a}}$ $\ell = 1$ ✓

$\boxed{\text{b}}$ Ha $\ell = 2$, akkor $2(k + 1) \geq d(X_1) + d(X_2) = d(X_1 \setminus X_2) + d(X_2 \setminus X_1) + 2d(X_1 \cap X_2, (V + z) \setminus (X_1 \cup X_2)) \geq k + k + 2$.
Végig egyenlőség áll, így $E(X_1 \cap X_2, (V + z) \setminus (X_1 \cup X_2)) = \{zu\}$ és $d(X_1) = d(X_2) = k + 1$. Mivel $d(z)$ páros, ezért feltehető, hogy $d(z, X_1 \setminus X_2) > d(z, X_2 \setminus X_1)$, ahonnan
$d(V \setminus X_1) = d(X_1) - d(z, X_1) + d(z, X_2 \setminus X_1) \leq$
$k + 1 - d(z, X_1 \setminus X_2) - 1 + d(z, X_2 \setminus X_1) < k$, ellentmondás.

Lovász leemelési tétele

Def: Ha $e = zu$, $f = zv$ a G gráf élei, akkor $G^{ef} := G - e - f + uv$ az e, f **leemelése** után kapott gráf.

Tétel: Ha $G = (V + z, E)$, $2 \mid d(z)$, $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2 \ \forall x, y \in V$, akkor $\forall e = zu \in E \ \exists f = zv \in E : \ \lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k \ \forall x, y \in V$.

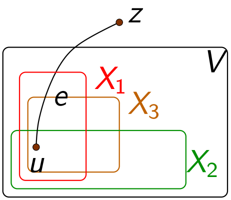
Biz: Az $X \subsetneq V$ halmaz **veszélyes**, ha $u \in X$ és $d(X) \leq k + 1$.
$f = zv$-re (e, f) nem leemelhető $\iff$ $\exists X \ni v$ veszélyes halmaz.

$\boxed{\textbf{II.}}$ Tfh $N(z) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} X_i$, ahol minden X_i veszélyes és ℓ minimális.

$\boxed{\text{a}}$ $\ell = 1$ $\checkmark$

$\boxed{\text{b}}$ $\ell = 2$ $\checkmark$

$\boxed{\text{c}}$ Ha $\ell \geq 3$, akkor



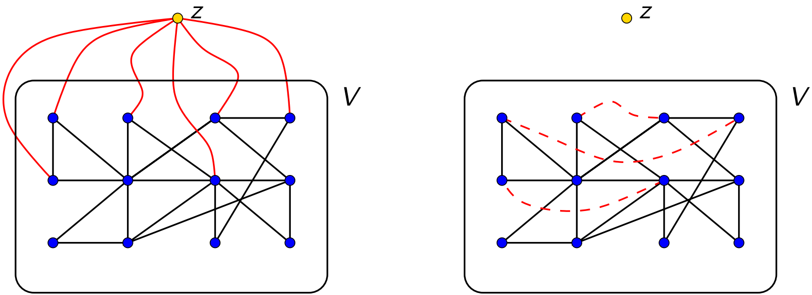
$3(k + 1) \geq d(X_1) + d(X_2) + d(X_3) \geq$
$d(X_1 \cap X_2 \cap X_3) + d(X_1 - (X_2 \cup X_3)) + d(X_2 - (X_1 \cup X_3)) + d(X_3 - (X_1 \cup X_2)) + 2d(X_1 \cap X_2 \cap X_3, (V + z) \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3)) \geq 4k + 2$,
ahonnan $k \leq 1$ adódik, ami ellentmondás. Ezek szerint mindenképp az $\boxed{\textbf{I.}}$ eset valósul meg, lehetséges a leemelés. $\square$

Teljes leemelés

Def: A G gráf z csúcsának **teljes leemelése** olyan z-re illeszkedő élpárok egymás utáni leemelése, ami után z izolált ponttá válik. Ezután z-t töröljük.

Teljes leemelés

Def: A G gráf z csúcsának **teljes leemelése** olyan z-re illeszkedő élpárok egymás utáni leemelése, ami után z izolált ponttá válik. Ezután z-t töröljük.



Teljes leemelés

Def: A G gráf z csúcsának **teljes leemelése** olyan z-re illeszkedő élpárok egymás utáni leemelése, ami után z izolált ponttá válik. Ezután z-t töröljük.

Teljes leemelés

Def: A G gráf z csúcsának **teljes leemelése** olyan z-re illeszkedő élpárok egymás utáni leemelése, ami után z izolált pontt á válik. Ezután z-t töröljük.

Tétel: Tfh a $G = (V + z, E)$ gráfban $d(z)$ páros és $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2 \ \forall x, \ y \in V$. Ekkor van z-nek olyan teljes leemelése, amire a kapott gráf k-élösszefüggő marad.

Teljes leemelés

Def: A G gráf z csúcsának **teljes leemelése** olyan z-re illeszkedő élpárok egymás utáni leemelése, ami után z izolált ponttá válik. Ezután z-t töröljük.

Tétel: Tfh a $G = (V + z, E)$ gráfban $d(z)$ páros és $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2 \ \forall x,\ y \in V$. Ekkor van z-nek olyan teljes leemelése, amire a kapott gráf k-élösszefüggő marad.

Biz: Lovász leemelési tétele miatt z-ről úgy emelhető le egy élpár, hogy a tétel feltételei a leemelés után is teljesülnek. Ezért egészen addig emelhetünk le élpárokat z-ről a V-beli csúcsok közötti lokális k-élösszefüggőség megtartásával, míg z izolálttá nem válik. Ekkor z-t törölhetjük. $\square$

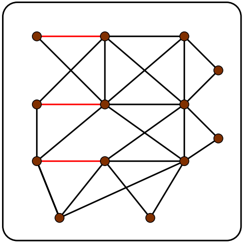
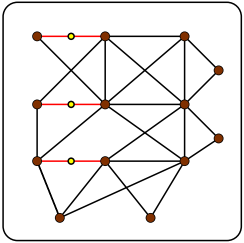
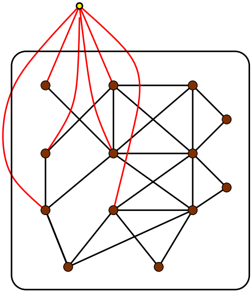
$2k$-élöf gráfok előállítása.

Cél: A fülfelbontásról korábban tanultakat általánosítjuk a továbbiakban. Emlékeztetőül: minden 2-élöf gráfnak van fülfelbontása, azaz minden elvágó él mentes öf gráf felépíthető egy pontból kiindulva fülek egymás utáni felragasztásával. Ezt az előállítási tételt és Robbins múltkori alkalommal igazolt eredményét terjesztjük ki. Mi lehet vajon a fülfelbontás általánosítása? Lássuk.

$2k$-élöf gráfok előállítása.

2k-élöf gráfok előállítása.

Def: A G gráf k **élének összecsípése** alatt azt értjük, hogy G k különböző élét felosztjuk egy-egy csúccsal, és ezeket azonosítjuk.

$2k$-élöf gráfok előállítása.

Def: A G gráf k **élének összecsípése** alatt azt értjük, hogy G k különböző élét felosztjuk egy-egy csúccsal, és ezeket azonosítjuk.

$2k$-élöf gráfok előállítása.

Def: A G gráf k **élének összecsípése** alatt azt értjük, hogy G k különböző élét felosztjuk egy-egy csúccsal, és ezeket azonosítjuk.

Tétel: Tetsz. G irányítatlan multigráf pontosan akkor $2k$-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból az alábbi lépések alkalmazásával: (i) él hozzáadása, (ii) k db él összecsípése.

$2k$-élöf gráfok előállítása.

Def: A G gráf k **élének összecsípése** alatt azt értjük, hogy G k különböző élét felosztjuk egy-egy csúccsal, és ezeket azonosítjuk.

Tétel: Tetsz. G irányítatlan multigráf pontosan akkor $2k$-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból az alábbi lépések alkalmazásával: (i) él hozzáadása, (ii) k db él összecsípése.

Biz: Elégségesség: könnyen ellenőrizhető, hogy a lépések alkalmazása során sosem keletkezik $2k$-nál kevesebb élű vágás.

$2k$-élöf gráfok előállítása.

Def: A G gráf k **élének összecsípése** alatt azt értjük, hogy G k különböző élét felosztjuk egy-egy csúccsal, és ezeket azonosítjuk.

Tétel: Tetsz. G irányítatlan multigráf pontosan akkor $2k$-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból az alábbi lépések alkalmazásával: (i) él hozzáadása, (ii) k db él összecsípése.

Biz: Elégségesség: könnyen ellenőrizhető, hogy a lépések alkalmazása során sosem keletkezik $2k$-nál kevesebb élű vágás. Szükségesség: azt igazoljuk, hogy tetsz. $2k$-élöf G gráf egy ponttá redukálható élek elhagyásával és $2k$-fokú csúcsok teljes leemelésével. Egy ilyen redukció időbeli megfordítása épp a G egy előállítása a tételben leírt lépésekkel.
A redukció végzésekor éleket hagyunk el, mindaddig míg G $2k$-élöf marad. *Ha bármely élt elhagyva G már nem marad $2k$-élöf, akkor G-nek van pontosan $2k$-fokú csúcsa is.* Ezt a csúcsot teljesen le tudjuk emelni a maradék gráfon a $2k$-szoros élösszefüggőség megtartásával. Így előbb utóbb G-t egy csúcsra redukáljuk. $\square$

k-élöf irányítás létezése

Nash-Williams tétele: Tetsz. G irányítatlan multigráf élei pontosan akkor irányíthatók úgy, hogy k-élösszefüggő gráfot kapjunk, ha G $2k$-élösszefüggő.

k-élöf irányítás létezése

Nash-Williams tétele: Tetsz. G irányítatlan multigráf élei pontosan akkor irányíthatók úgy, hogy k-élösszefüggő gráfot kapjunk, ha G $2k$-élösszefüggő.

Biz: Szükségesség: Tekintsük G egy k-élöf gráffá irányítását. Ebben bármely $\emptyset \neq X \subsetneq V(G)$ ponthalmazba legalább k él lép be, és belőle legalább k él lép ki. Ezért $d_G(X) \geq 2k$, tetsz. X esetén, azaz G bizonyosan $2k$-élöf.

k-élöf irányítás létezése

Nash-Williams tétele: Tetsz. G irányítatlan multigráf élei pontosan akkor irányíthatók úgy, hogy k-élösszefüggő gráfot kapjunk, ha G $2k$-élösszefüggő.

Biz: Szükségesség: Tekintsük G egy k-élöf gráffá irányítását. Ebben bármely $\emptyset \neq X \subsetneq V(G)$ ponthalmazba legalább k él lép be, és belőle legalább k él lép ki. Ezért $d_G(X) \geq 2k$, tetsz. X esetén, azaz G bizonyosan $2k$-élöf. Elégségesség: Tekintsük G egy élbehúzásokkal és k él összecsípésével történő előállítását. Képezzük G egy irányítását úgy, hogy az élek behúzása helyett az adott él egy tetszőleges irányítást húzzuk be, az élösszecsípések során pedig megőrizzük az összecsípett élek irányítást. Világos, hogy él hozzáadásával nem keletkezhet k-nál kevesebb élű irányított vágás. De k él összecsípese nyoman sem adódhat ilyen. Ha u.i. a vágás mindkét oldalán van az összecsípett csúcstól különböző csúcs, akkor az eredeti gráfban is lenne k-nál kisebb irányított vágás, és ha az összecsípett csúcs egymaga a vágás egyik része, akkor sem. A G így felépített irányítása tehát k-élöf. $\square$

Ismét jót mulattunk!