

Kombinatorikus optimalizálás

Gráfok összefüggőségének meghatározása, minimális vágás keresése

2023. április 25.

Bevezetés

Egy gráf akkor összefüggő, ha bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet út. Definiálható a magasabb összefüggőség is, ami a gyakorlatban is hasznos fogalom pl megbízható hálózatok tervezésekor.

Bevezetés

Egy gráf akkor összefüggő, ha bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet út. Definiálható a magasabb összefüggőség is, ami a gyakorlatban is hasznos fogalom pl megbízható hálózatok tevezésekor.

Egy G gráf akkor **k -szorosán élösszefüggő (k -élőf)**, ha bárhogy is törölünk G -ből legfeljebb $k - 1$ élt, azt G túléli (vagyis összefüggő marad). Menger tétele szerint ez azzal ekvivalens, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet k olyan út, amelyek közül semelyik kettőnek sincs közös éle. A **G gráf élösszefüggősége** $\lambda(G) = k$, ha G k -élőf, de nem $(k + 1)$ -élőf. Ez az érték megegyezik G minimális vágásának méretével, ahol minimális vágás az olyan lehető legkevesebb élből álló halmaz, amit elhagyva G nem marad öf.

Bevezetés

Bevezetés

Egy G gráf akkor **k -szorosan pontösszefüggő (k -öf)**, ha (1) $|V(G)| \geq k + 1$ és (2) bárhogy is törölünk G -ből legfeljebb $k - 1$ csúcsot, azt G túléli (vagyis összefüggő marad). Menger tétele szerint ez azzal ekvivalens, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet k olyan út, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös belső csúcsa. (Az (1) feltétel jelentősége, hogy annak hiányában K_n bármilyen k -ra k -öf lenne.) **G pontösszefüggősége** $\kappa(G) = k$, ha G k -öf, de nem $(k + 1)$ -öf. Pl. $\kappa(K_n) = n$.

Bevezetés

Egy G gráf akkor **k -szorosan pontösszefüggő (k -öf)**, ha (1) $|V(G)| \geq k + 1$ és (2) bárhogy is törölünk G -ből legfeljebb $k - 1$ csúcsot, azt G túléli (vagyis összefüggő marad). Menger tétele szerint ez azzal ekvivalens, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet k olyan út, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös belső csúcsa. (Az (1) feltétel jelentősége, hogy annak hiányában K_n bármilyen k -ra k -öf lenne.) **G pontösszefüggősége** $\kappa(G) = k$, ha G k -öf, de nem $(k + 1)$ -öf. Pl. $\kappa(K_n) = n$.
Az 2-élőf ill 2-öf gráfok struktúráját fogjuk vizsgálni, és általában azt nézzük meg, hogyan lehet egy gráfban minimális vágást találni, azaz minimális számú él törlésével elérni, hogy G ne maradjon összefüggő.

$\lambda(G)$ meghatározása folyamokkal

$\lambda(G)$ meghatározása folyamokkal

Ha $\lambda(G)$ -t keressük, akkor azt szeretnénk megállapítani, mennyi a legkevesebb él, aminek a törlésétől G szétesik, azaz G egy u és egy v csúcsa között nem lesz út. Rögzített u, v esetén egyetlen folyamalgoritmussal meg tudunk határozni egy minimális uv -vágást G -ben ($c \equiv 1$ és G minden élét oda-vissza megirányítjuk). Ha az összes lehetséges u, v csúcspárra ezt megtesszük, akkor a kapott legkisebb vágás G egy minimális vágása lesz.

$\lambda(G)$ meghatározása folyamokkal

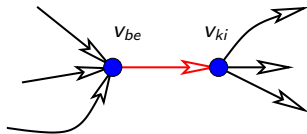
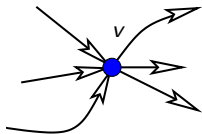
Ha $\lambda(G)$ -t keressük, akkor azt szeretnénk megállapítani, mennyi a legkevesebb él, aminek a törlésétől G szétesik, azaz G egy u és egy v csúcsa között nem lesz út. Rögzített u, v esetén egyetlen folyamalgoritmussal meg tudunk határozni egy minimális uv -vágást G -ben ($c \equiv 1$ és G minden élét oda-vissza megirányítjuk). Ha az összes lehetséges u, v csúcspárra ezt megtesszük, akkor a kapott legkisebb vágás G egy minimális vágása lesz.

Ennél azonban van jobb módszer is. Legyen v a G egy kitüntetett csúcsa. G bármely minimális vágása olyan, hogy ha elhagyjuk az éleit, akkor lesz G -nek olyan $u \neq v$ csúcsa, hogy u és v közöt nincs út. Ezért G bármely minvágása olyan, hogy megkapható a kitüntetett v -t egy alkalmas u csúcstól szeparáló minimális vágásként egyetlen folyamalgoritmussal. Ezért ha v -t rögzítjük, akkor elegendő $n - 1$ folyamalgoritmust futtani, ahol n a G csúcsai száma. (Tkp. $\lambda(G)$ a $\lambda(u, v)$ -k minimuma, ahol v rögzített, u pedig bármelyik másik csúcs lehet.)

$\kappa(G)$ meghatározása folyamokkal

Az előbbi ötlet működik a pontösszefüggőség meghatározására is. Ha az összes u, v csúcspárra meghatározzuk $\kappa(u, v)$ -t (az u és v között futó, belsőleg páronként pontdiszjunkt utak maximális számát), akkor

$\kappa(G) = \min \{ |V(G)| - 1, \min \{ \kappa(u, v) : u, v \in V(G) \} \}$, és ez alapján $\kappa(G)$ meghatározható. Egyetlen $\kappa(u, v)$ meghatározása szintén a folyamalgoritmussal lehetséges: minden élt oda-vissza irányítunk, a csúcsokat széthúzzuk és minden irányított élnek 1 kapacitást adunk.



$\kappa(G)$ meghatározása folyamokkal

Az előbbi ötlet működik a pontösszefüggőség meghatározására is. Ha az összes u, v csúcspárra meghatározzuk $\kappa(u, v)$ -t (az u és v között futó, belsőleg páronként pontdiszjunkt utak maximális számát), akkor

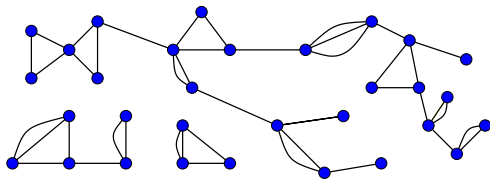
$\kappa(G) = \min \{|V(G)| - 1, \min\{\kappa(u, v) : u, v \in V(G)\}\}$, és ez alapján $\kappa(G)$ meghatározható. Egyetlen $\kappa(u, v)$ meghatározása szintén a folyamalgoritmussal lehetséges: minden élt oda-vissza irányítunk, a csúcsokat széthúzzuk és minden irányított élnek 1 kapacitást adunk.



Pontösszefüggőség meghatározásakor azonban nem működik a második ötlet: nem rögzíthetjük az $s = v$ csúcsot, mert lehet, hogy v -t el kell hagyni G minimális vágásban.

Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

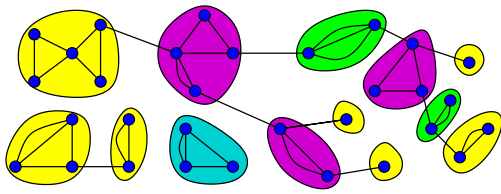
A G gráf akkor 2-élösszefüggőségi, ha G öf, és G -nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.



Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

A G gráf akkor 2-élőf, ha G öf, és G -nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

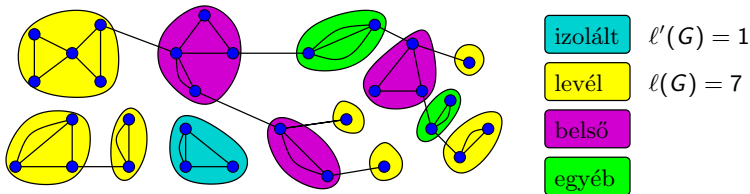
Def: A G gráf **2-komponensei** a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-komponens **izolált**, ha 0, **levél**, ha 1 és **belső**, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

A G gráf akkor 2-élőf, ha G öf, és G -nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

Def: A G gráf **2-komponensei** a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-komponens **izolált**, ha 0, **levél**, ha 1 és **belső**, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.

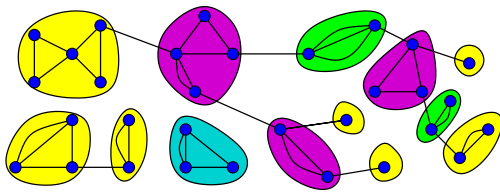


Megf: A G gráf 2-komponenseit egy-egy pontba összeolvasztva olyan erdőt kapunk, aminek élei a G elvágó élei. Ha G összefüggő, akkor ez az erdő fa.

Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

A G gráf akkor 2-élőf, ha G öf, és G -nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

Def: A G gráf **2-komponensei** a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-komponens **izolált**, ha 0, **levél**, ha 1 és **belső**, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.

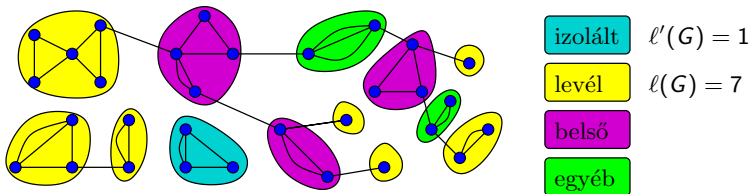


izolált	$\ell'(G) = 1$
levél	$\ell(G) = 7$
belső	
egyéb	

Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

A G gráf akkor 2-élőf, ha G öf, és G -nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

Def: A G gráf **2-komponensei** a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-komponens **izolált**, ha 0, **levél**, ha 1 és **belső**, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.

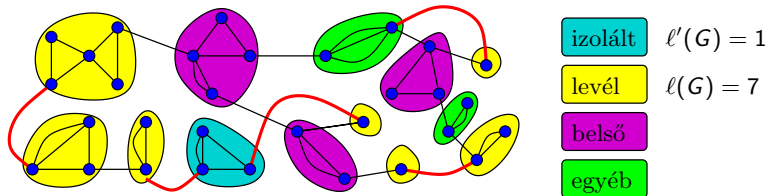


Tétel: A G gráf 2-élösszefüggővé tételéhez szükséges behúzendó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G) + 2\ell'(G)}{2} \right\rceil$.

Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

A G gráf akkor 2-élőf, ha G öf, és G -nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

Def: A G gráf **2-komponensei** a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-komponens **izolált**, ha 0, **levél**, ha 1 és **belső**, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



Tétel: A G gráf 2-élösszefüggővé tételéhez szükséges behúzendó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G) + 2\ell'(G)}{2} \right\rceil$.

Biz: Minden levél 2-komponensből ki kell indulnia egy új élnek, minden izolált 2-komponensből legalább 2-nek. Mindig be lehet húzni olyan élt, ami a formula értékét 1-gyel csökkenti.



Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G -nek nincs elvágó pontja.

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

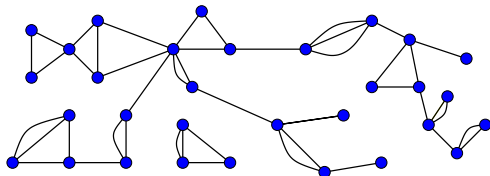
G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G -nek nincs elvágó pontja.

Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. **Maxblokk:** maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja **izolált blokk (levélblokk)**, ha G -nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ az egy csúcs elhagyásával keletkező komponensek maximális számát jelöli.

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G -nek nincs elvágó pontja.

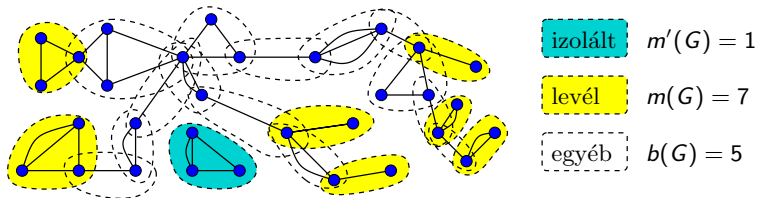
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. **Maxblokk:** maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja **izolált blokk (levélblokk)**, ha G -nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ az egy csúcs elhagyásával keletkező komponensek maximális számát jelöli.



Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G -nek nincs elvágó pontja.

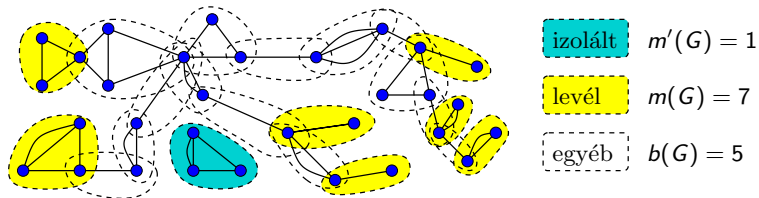
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. **Maxblokk:** maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja **izolált blokk (levélblokk)**, ha G -nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ az egy csúcs elhagyásával keletkező komponensek maximális számát jelöli.



Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

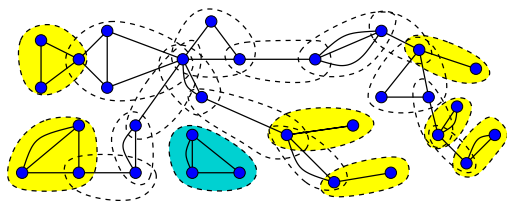
G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G -nek nincs elvágó pontja.

Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. **Maxblokk:** maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja **izolált blokk (levélblokk)**, ha G -nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ az egy csúcs elhagyásával keletkező komponensek maximális számát jelöli.



Megf: A G gráf maxblokkjai az elvágó pontok mentén faszzerűen kapcsolódnak: ha minden maxblokkot egy csúccsal helyettesítünk, amit a G maxblokkbeli elvágó pontjaival kötünk össze, akkor így olyan $T_2(G)$ erdőt kapunk, aminek csúcsai a maxblokkok és G elvágó pontjai. Ha G öf, akkor $T_2(G)$ fa. $T_2(G)$ izolált pontjai az izolált blokkoknak, a levelei pedig a levélblokkoknak felelnek meg. ☰ 🔍 ↻

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája



izolált

$$m'(G) = 1$$

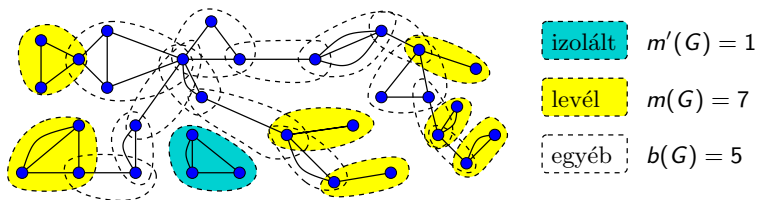
levél

$$m(G) = 7$$

egyéb

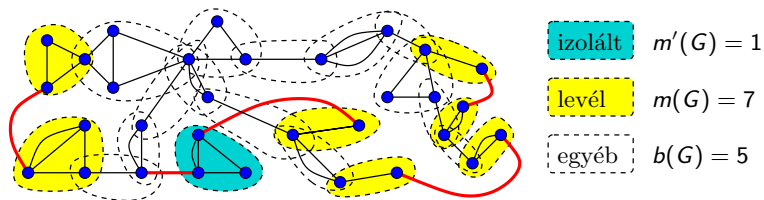
$$b(G) = 5$$

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája



Tétel: A G gráf 2-összefüggővé tételéhez szükséges behúzendó élek minimális száma $\max \left\{ b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G) + 2m'(G)}{2} \right\rceil \right\}$.

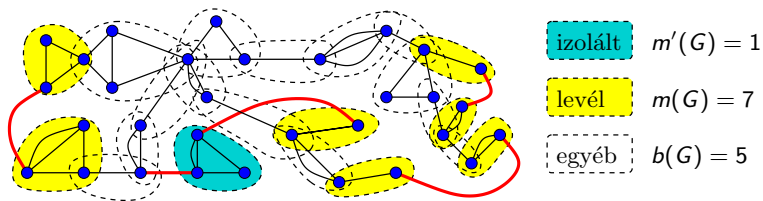
Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája



Tétel: A G gráf 2-összefüggővé tételéhez szükséges behúzendó élek minimális száma $\max \left\{ b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G) + 2m'(G)}{2} \right\rceil \right\}$.

Biz: Minden levélblokkból kell indulnia új élnek, minden izoláltból legalább 2-nek. Ha egy csúcs elhagyása nyomán $b(G)$ komponens keletkezik, akkor már emiatt legalább $b(G) - 1$ él szükséges, hisz minden behúzott él legfeljebb 1-gyel csökkenti a komponensek számát.

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája



Tétel: A G gráf 2-összefüggővé tételéhez szükséges behúzendó élek minimális száma $\max \left\{ b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G) + 2m'(G)}{2} \right\rceil \right\}$.

Biz: Minden levélblokkból kell indulnia új élnek, minden izoláltból legalább 2-nek. Ha egy csúcs elhagyása nyomán $b(G)$ komponens keletkezik, akkor már emiatt legalább $b(G) - 1$ él szükséges, hisz minden behúzott él legfeljebb 1-gyel csökkenti a komponensek számát.

Mindig be lehet húzni egy élt úgy, hogy a formula értéke 1-gyel csökkenjen, ezért a formulával megadott élszám mindig elegendő. □

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G -ben a c kap.fv-re. Ha a c -vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G -ben a c kap.fv-re. Ha a c -vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Biz: $2\check{c}(E) = \sum \{\check{c}(E(v)) : v \in V\} \geq n \cdot \lambda_c(G)$, így $P(e \in E(X)) = \frac{\lambda_c(G)}{\check{c}(E)} \leq \frac{2}{n}$. □

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G -ben a c kap.fv-re. Ha a c -vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G -ben a c kap.fv-re. Ha a c -vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Megf: Ha $e \notin E(X)$, akkor az X által reprezentált minvágás az e összehúzósa után is megmarad. Ezért annak a valószínűsége, hogy az $E(X)$ minvágás egymás után $n - 2$ random élösszehúzást túlél, legalább $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

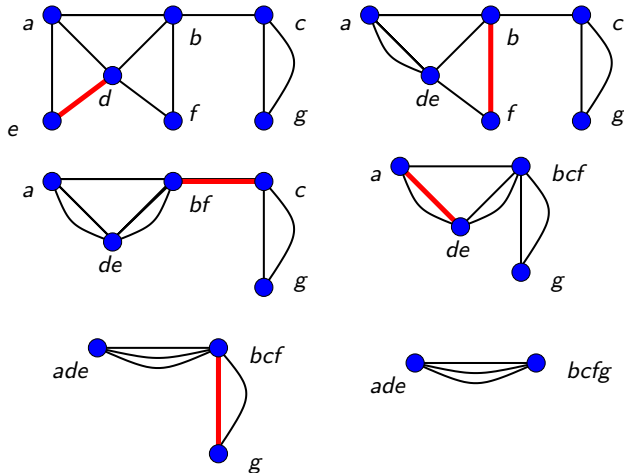
Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G -ben a c kap.fv-re. Ha a c -vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Megf: Ha $e \notin E(X)$, akkor az X által reprezentált minvágás az e összehúzása után is megmarad. Ezért annak a valószínűsége, hogy az $E(X)$ minvágás egymás után $n - 2$ random élösszehúzást túlél, legalább $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$.

Karger algoritmus: c -vel arányos eloszlással válasszunk random élt, és húzzuk össze. (Élösszehúzásnál itt a párhuzamos éleket megtartjuk, a hurokéleket töröljük.) Ismételjük ezt egészen addig, amíg a gráf két csúcsú marad. A két csúcs ösképe által meghatározott vágás egy jelölt a G minimális vágására. Annak a valószínűsége, hogy $k \cdot n^2$ ilyen vágásjelölt között $E(X)$ nem fordul elő legfeljebb e^{-2k} , ami nagyon gyorsan tart 0-hoz.

Karger algoritmusának illusztrációja

Az összehúzó random élt piros szín jelöli. A végső vágásjelölt az $\{a, d, e\}$ csúcshalmazból kilépő élek halmaza.



Gráf élösszefüggőségének meghatározása II.

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$ -re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II.

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$ -re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak v_1, v_2, \dots, v_n **maxvissza sorrendje**, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén v_i azon csúcsok egyike, amelyek a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II.

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$ -re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak v_1, v_2, \dots, v_n **maxvissza sorrendje**, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén v_i azon csúcsok egyike, amelyek a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

Tétel: Ha v_1, v_2, \dots, v_n a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$. □

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II.

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$ -re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak v_1, v_2, \dots, v_n **maxvissza sorrendje**, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén v_i azon csúcsok egyike, amelyek a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

Tétel: Ha v_1, v_2, \dots, v_n a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$. □

Köv: Ha v_1, v_2, \dots, v_n a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(G) = d(v_n)$ vagy $\lambda(G) = \lambda(G/v_{n-1}v_n)$, ahol G/uv az u és v csúcsok egybeolvasztásával kapott gráf. □

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II.

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$ -re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak v_1, v_2, \dots, v_n **maxvissza sorrendje**, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén v_i azon csúcsok egyike, amelyek a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

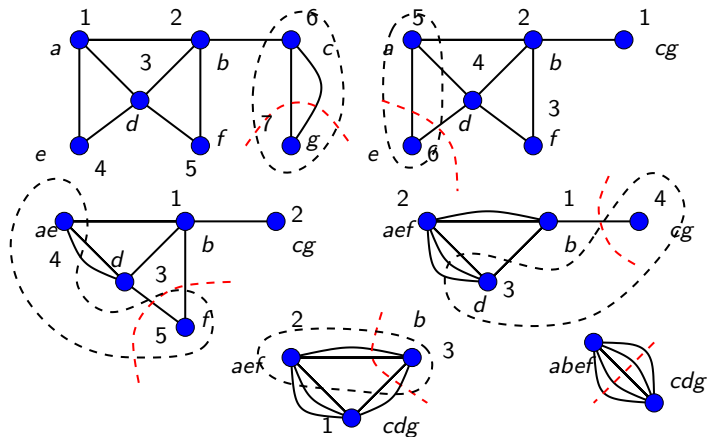
Tétel: Ha v_1, v_2, \dots, v_n a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$. □

Köv: Ha v_1, v_2, \dots, v_n a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(G) = d(v_n)$ vagy $\lambda(G) = \lambda(G/v_{n-1}v_n)$, ahol G/uv az u és v csúcsok egybeolvasztásával kapott gráf. □

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus: Maxvissza sorrendet utolsó két csúcsát egybeolvasztjuk, majd ugyanezt ismételjük egészen addig, amíg csak 2 csúcs marad. Minden köztes gráf utolsó csúcsából kiinduló élek által definiált egy pontú vágásnak megfelel az eredeti G gráf egy vágása. Ezen $n - 1$ vágásjelölt közül a legkevesebbet tartalmazó az output: ez G egy minimális vágása.

A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus illusztrációja

A maxvissza sorrendet számozás, az összeolvasztandó csúcspárt szaggatott bekeretezés, a vágásjelölteket szaggatott piros ív jelöli. A legjobb vágásjelölt $\{c, g\}$ csúcshalmazból kilépő élek halmaza: ez az algoritmus outputja.



Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- ▶ Gráfok magasabb összefüggősége: hány él ill. csúcs elhagyását éli túl (csúcsok közötti él/pontdiszjunkt utak száma)

Mit tanultunk ma?

- ▶ Gráfok magasabb összefüggősége: hány él ill. csúcs elhagyását éli túl (csúcsok közötti él/pontdiszjunkt utak száma)
- ▶ Él/pontösszefüggőség meghatározása hálózati folyamatokkal

Mit tanultunk ma?

- ▶ Gráfok magasabb összefüggősége: hány él ill. csúcs elhagyását éli túl (csúcsok közötti él/pontdiszjunkt utak száma)
- ▶ Él/pontösszefüggőség meghatározása hálózati folyamatokkal
- ▶ 2-komponensek ill. blokkok struktúrája, 2-élőf ill. 2-őf tulajdonság eléréséhez szükséges élek minimális száma

Mit tanultunk ma?

- ▶ Gráfok magasabb összefüggősége: hány él ill. csúcs elhagyását éli túl (csúcsok közötti él/pontdiszjunkt utak száma)
- ▶ Él/pontösszefüggőség meghatározása hálózati folyamatokkal
- ▶ 2-komponensek ill. blokkok struktúrája, 2-élőf ill. 2-őf tulajdonság eléréséhez szükséges élek minimális száma
- ▶ Karger véletlent használó algoritmusának irányítatlan gráf élösszefüggőségének meghatározására

Mit tanultunk ma?

- ▶ Gráfok magasabb összefüggősége: hány él ill. csúcs elhagyását éli túl (csúcsok közötti él/pontdiszjunkt utak száma)
- ▶ Él/pontösszefüggőség meghatározása hálózati folyamatokkal
- ▶ 2-komponensek ill. blokkok struktúrája, 2-élőf ill. 2-őf tulajdonság eléréséhez szükséges élek minimális száma
- ▶ Karger véletlent használó algoritmusára irányítatlan gráf élösszefüggőségének meghatározására
- ▶ Nagamochi és Ibaraki determinisztikus algoritmusára ugyanerre maxvissza sorrenddel

Mit tanultunk ma?

- ▶ Gráfok magasabb összefüggősége: hány él ill. csúcs elhagyását éli túl (csúcsok közötti él/pontdiszjunkt utak száma)
- ▶ Él/pontösszefüggőség meghatározása hálózati folyamatokkal
- ▶ 2-komponensek ill. blokkok struktúrája, 2-élőf ill. 2-őf tulajdonság eléréséhez szükséges élek minimális száma
- ▶ Karger véletlent használó algoritmus a irányítatlan gráf élösszefüggőségének meghatározására
- ▶ Nagamochi és Ibaraki determinisztikus algoritmus a ugyanerre maxvissza sorrenddel

Itt a vége, fuss el véle!