Kombinatorikus optimalizálás

Egészértékű programozási feladatok

2023. április 4.

Hol tartunk?

- LP feladat: egy célfüggvény lineáris és nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása.

Hol tartunk?

- LP feladat: egy célfüggvény lineáris és nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása.
- Tkp félterek metszeteként előálló konvex halmaz támaszhipersíkját keressük.

Hol tartunk?

- LP feladat: egy célfüggvény lineáris és nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása.
- Tkp félterek metszeteként előálló konvex halmaz támaszhipersíkját keressük.
- Szamárvezető + ökölszabályok segítségével DLP készíthető. Ha a primál és a duál feladatnak is van megoldása, akkor az LP és DLP optimumértékek egyenlők.

Hol tartunk?

- LP feladat: egy célfüggvény lineáris és nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása.
- Tkp félterek metszeteként előálló konvex halmaz támaszhipersíkját keressük.
- Szamárvezető + ökölszabályok segítségével DLP készíthető. Ha a primál és a duál feladatnak is van megoldása, akkor az LP és DLP optimumértékek egyenlők.
- Tehát azonos célfüggvényértékkel rendelkező primál ill. duálmegoldások egymás optimalitását bizonyítják.

Hol tartunk?

- LP feladat: egy célfüggvény lineáris és nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása.
- Tkp félterek metszeteként előálló konvex halmaz támaszhipersíkját keressük.
- Szamárvezető + ökölszabályok segítségével DLP készíthető. Ha a primál és a duál feladatnak is van megoldása, akkor az LP és DLP optimumértékek egyenlők.
- Tehát azonos célfüggvényértékkel rendelkező primál ill. duálmegoldások egymás optimalitását bizonyítják.
- Ezt a jelenséget már korábban is tapasztaltuk: ha egy *st*-folyam nagysága megegyezik egy *st*-vágás kapacitásával, akkor a folyam max nagyságú, a vágás min kapacitású. Ha egy TP súlya azonos egy súlyozott lefogás összsúlyával, akkor a TP max súlyú, a lefogás pedig min összsúlyú.

Hol tartunk?

- LP feladat: egy célfüggvény lineáris és nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása.
- Tkp félterek metszeteként előálló konvex halmaz támaszhipersíkját keressük.
- Szamárvezető + ökölszabályok segítségével DLP készíthető. Ha a primál és a duál feladatnak is van megoldása, akkor az LP és DLP optimumértékek egyenlők.
- Tehát azonos célfüggvényértékkel rendelkező primál ill. duálmegoldások egymás optimalitását bizonyítják.
- Ezt a jelenséget már korábban is tapasztaltuk: ha egy *st*-folyam nagysága megegyezik egy *st*-vágás kapacitásával, akkor a folyam max nagyságú, a vágás min kapacitású. Ha egy TP súlya azonos egy súlyozott lefogás összsúlyával, akkor a TP max súlyú, a lefogás pedig min összsúlyú.
- Nocsak.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf M élhalmazának **karakterisztikus vektora** az a $\chi_M \in \mathbb{R}^E$, amire $\chi_M(e) = 1$, ha $e \in M$ és $\chi_M(e) = 0$, ha $e \notin M$.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf M élhalmazának **karakterisztikus vektora** az a $\chi_M \in \mathbb{R}^E$, amire $\chi_M(e) = 1$, ha $e \in M$ és $\chi_M(e) = 0$, ha $e \notin M$.

Megf: (1) A teljes párosítás karakterisztikus vektora teljesíti az alábbi feltételeket: $\chi_M \geq 0$, $\widetilde{\chi_M}(E(v)) = 1\ \forall v \in V$.

(2) Tetsz. M élhalmaz $w : E \to \mathbb{R}_+$ szerinti súlya $\tilde{w}(M) = w \cdot \chi_M$.

(3) Ha $x \in \mathbb{Z}^E$ **egész** vektor, amire $0 \leq x$ és $\tilde{x}(E(v)) = 1\ \forall v \in V$, akkor x egy teljes párosítás karakterisztikus vektora.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf M élhalmazának **karakterisztikus vektora** az a $\chi_M \in \mathbb{R}^E$, amire $\chi_M(e) = 1$, ha $e \in M$ és $\chi_M(e) = 0$, ha $e \notin M$.
Megf: (1) A teljes párosítás karakterisztikus vektora teljesíti az alábbi feltételeket: $\chi_M \geq 0$, $\widetilde{\chi_M}(E(v)) = 1 \ \forall v \in V$.
(2) Tetsz. M élhalmaz $w : E \to \mathbb{R}_+$ szerinti súlya $\tilde{w}(M) = w \cdot \chi_M$.
(3) Ha $x \in \mathbb{Z}^E$ **egész** vektor, amire $0 \leq x$ és $\tilde{x}(E(v)) = 1 \ \forall v \in V$, akkor x egy teljes párosítás karakterisztikus vektora.
Def: Az **egészprogramozási feladat (IP)** egy olyan LP feladat, amelyikben a megoldástól azt is megköveteljük, hogy minden változó értéke egész szám legyen. Az IP feladat **relaxáltja** az az LP feladat, amit az IP-ből az egészértékűségi feltételek elhagyásával kapunk. Az IP feladat **duálisa (DIP)** a relaxált duálisából kapható úgy, hogy a duális változókra is megköveteljük az egészértékűséget.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Megf: (1) A teljes párosítás karakterisztikus vektora teljesíti az alábbi feltételeket: $\chi_M \geq 0$, $\widetilde{\chi_M}(E(v)) = 1\ \forall v \in V$.
(2) Tetsz. M élhalmaz $w : E \to \mathbb{R}_+$ szerinti súlya $\tilde{w}(M) = w \cdot \chi_M$.
(3) Ha $x \in \mathbb{Z}^E$ **egész** vektor, amire $0 \leq x$ és $\tilde{x}(E(v)) = 1\ \forall v \in V$, akkor x egy teljes párosítás karakterisztikus vektora.

Def: Az **egészprogramozási feladat (IP)** egy olyan LP feladat, amelyikben a megoldástól azt is megköveteljük, hogy minden változó értéke egész szám legyen. Az IP feladat **relaxáltja** az az LP feladat, amit az IP-ből az egészértékűségi feltételek elhagyásával kapunk. Az IP feladat **duálisa (DIP)** a relaxált duálisából kapható úgy, hogy a duális változókra is megköveteljük az egészértékűséget.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Megf: (1) A teljes párosítás karakterisztikus vektora teljesíti az alábbi feltételeket: $\chi_M \geq 0$, $\widetilde{\chi_M}(E(v)) = 1 \ \forall v \in V$.
(2) Tetsz. M élhalmaz $w : E \to \mathbb{R}_+$ szerinti súlya $\tilde{w}(M) = w \cdot \chi_M$.
(3) Ha $x \in \mathbb{Z}^E$ **egész** vektor, amire $0 \leq x$ és $\tilde{x}(E(v)) = 1 \ \forall v \in V$, akkor x egy teljes párosítás karakterisztikus vektora.

Def: Az **egészprogramozási feladat (IP)** egy olyan LP feladat, amelyikben a megoldástól azt is megköveteljük, hogy minden változó értéke egész szám legyen. Az IP feladat **relaxáltja** az az LP feladat, amit az IP-ből az egészértékűségi feltételek elhagyásával kapunk. Az IP feladat **duálisa (DIP)** a relaxált duálisából kapható úgy, hogy a duális változókra is megköveteljük az egészértékűséget.

Megj: (1) Az LP feladatban egy konvex halmazon, az IP-ben pedig egy konvex halmaz rácspontjain optimalizálunk.
(2) Ps gráf maximális súlyú TP-a felírható IP feladatként.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Def: Az **egészprogramozási feladat (IP)** egy olyan LP feladat, amelyikben a megoldástól azt is megköveteljük, hogy minden változó értéke egész szám legyen. Az IP feladat **relaxáltja** az az LP feladat, amit az IP-ből az egészértekűségi feltételek elhagyásával kapunk. Az IP feladat **duálisa (DIP)** a relaxált duálisából kapható úgy, hogy a duális változókra is megköveteljük az egészértékűséget.

Megj: (1) Az LP feladatban egy konvex halmazon, az IP-ben pedig egy konvex halmaz rácspontjain optimalizálunk.
(2) Ps gráf maximális súlyú TP-a felírható IP feladatként.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Def: Az **egészprogramozási feladat (IP)** egy olyan LP feladat, amelyikben a megoldástól azt is megköveteljük, hogy minden változó értéke egész szám legyen. Az IP feladat **relaxáltja** az az LP feladat, amit az IP-ből az egészértekűségi feltételek elhagyásával kapunk. Az IP feladat **duálisa (DIP)** a relaxált duálisából kapható úgy, hogy a duális változókra is megköveteljük az egészértékűséget.

Megj: (1) Az LP feladatban egy konvex halmazon, az IP-ben pedig egy konvex halmaz rácspontjain optimalizálunk.

(2) Ps gráf maximális súlyú TP-a felírható IP feladatként.

Megf: Ha a $\max cx / \min yb$ típusú IP/DIP feladatok kielégíthetők, akkor $\quad \max_{IP} cx \leq \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \leq \min_{DIP} yb$.

Max súlyú teljes párosítások és IP feladatok

Def: Az **egészprogramozási feladat (IP)** egy olyan LP feladat, amelyikben a megoldástól azt is megköveteljük, hogy minden változó értéke egész szám legyen. Az IP feladat **relaxáltja** az az LP feladat, amit az IP-ből az egészértekűségi feltételek elhagyásával kapunk. Az IP feladat **duálisa (DIP)** a relaxált duálisából kapható úgy, hogy a duális változókra is megköveteljük az egészértékűséget.

Megj: (1) Az LP feladatban egy konvex halmazon, az IP-ben pedig egy konvex halmaz rácspontjain optimalizálunk.
(2) Ps gráf maximális súlyú TP-a felírható IP feladatként.

Megf: Ha a $\max cx/\min yb$ típusú IP/DIP feladatok kielégíthetők, akkor $\max_{IP} cx \le \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \le \min_{DIP} yb$.

Köv: Ha a fenti IP és DIP feladatok x ill. y megoldására $cx = yb$ teljesül, akkor x és y a megfelelő feladatok optimális megoldásai.

Megj: (1) $cx = yb$ nem mindig teljesül az IP/DIP optimumokra.
(2) A továbbiakban arra keresünk feltételt, hogy az LP ill. DLP feladatoknak automatikusan legyen egész optimuma.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Megj: TU mátrix elemei csak 0 és ± 1 lehetnek.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.

Lemma: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* **egész** vektor, amire $Ax^* = b$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.

Lemma: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* **egész** vektor, amire $Ax^* = b$.

Biz: (Vázlat) Sorra végigmegyünk az egyenleteken. Ha a soron következő elhagyásával nem változik a megoldások halmaza, akkor elhagyjuk. Végül olyan (TU) egyenletrendszer marad, aminek minden megoldása megoldja az eredetit is.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Lemma: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* **egész** vektor, amire $Ax^* = b$.
Biz: (Vázlat) Sorra végigmegyünk az egyenleteken. Ha a soron következő elhagyásával nem változik a megoldások halmaza, akkor elhagyjuk. Végül olyan (TU) egyenletrendszer marad, aminek minden megoldása megoldja az eredetit is.
A szabad paraméterek oszlopait A-ból elhagyva egy négyzetes TU mátrixszal adott olyan $A'x' = b'$ egyenletrendszer adódik, aminek egyértelmű a megoldása: $x' = (A')^{-1}A'x' = (A')^{-1}b'$. Ráadásul $\det A' = \pm 1$ miatt $(A')^{-1}$ egész mátrix, így x' egész. A szabad paramétereknek 0 értéket adva x'-ből egy x^* egész megoldás adódik. Pontosan erre volt szükség. $\square$

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Lemma: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* **egész** vektor, amire $Ax^* = b$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Lemma: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* **egész** vektor, amire $Ax^* = b$.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.

Lemma: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* **egész** vektor, amire $Ax^* = b$.

Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.

Megj: A következmény azt mondja ki, hogy ha TU együtthatómátrix esetén minden egyenlőtlenség jobb oldalán álló egész szám áll, akkor a a megoldások között van rácspont.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Biz: (Vázlat) Sorra végigmegyünk az egyenlőtlenségeken. Ha a soron következő elhagyásával nem változik a megoldások halmaza, elhagyjuk, ha változik, akkor egyenlőséggel követeljük meg. Mindkét esetben marad megoldás, és új megoldás nem keletkezik. A fenti lemma miatt az eljárás végén kapott (TU) egyenletrendszernek van egy egész megoldása, mondjuk x^*. Ugyanez az x^* megoldja az eredeti egyenlőtlenségrendszert is. $\square$

TU mátrixok

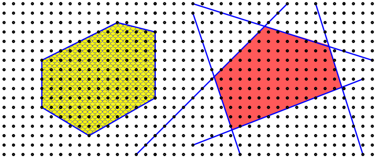
Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.
Megj: (1) A tétel azt mondja ki, hogy TU együtthatómátrix és egész jobb oldalak esetén az **optimális** megoldások között van rácspont.



TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.
Megj: (2) A fenti alaktól eltérő, nemsztenderd LP/DLP párokra hasonló tétel igaz.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.

Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.

Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.

Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

Biz: Az előző következmény bizonyításán annyit kell módosítani, hogy az **optimális** megoldásokat kell nézni a feltételritkításnál. $\square$

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.
Tanulság: A TU együtthatómátrixnak azért örülünk, mert automatikusan lesz egész optimum.
Kínzó kérdés: Jó, jó: de mitől lesz egy mátrix TU?

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.
Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.
Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.
Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

TU mátrixok

Def: Az A mátrix **teljesen unimoduláris (TU)**, ha A minden négyzetes részmátrixának 0 vagy ± 1 a determinánsa.

Köv: Tfh A TU mx, a b oszlopvektor minden koordinátája egész és az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor van olyan x^* egész vektor, amire $Ax^* \leq b$.

Tétel: Ha A TU mx és b egész vektor esetén a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ LP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is, azaz $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$.

Ha c egész vektor esetén a $\min\{yb : y \geq 0, Ax = c\}$ DLP-nek van optimuma, akkor van egész optimuma is: $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$.

Állítás: Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha

(1) transzponáljuk,

(2) valamely sorát/oszlopát (-1)-gyel végigszorozzuk,

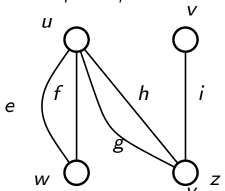
(3) valamely sorát/oszlopát megismételjük vagy töröljük,

(4) két sorát/oszlopát felcseréljük,

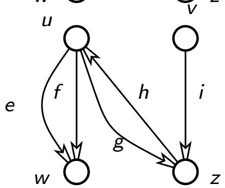
(5) A-t egy egységvektor sorral/oszloppal bővítjük.

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak „indul”.)



$$\begin{array}{c}\\ u\\ v\\ w\\ z\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} e & f & g & h & i\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$



$$\begin{array}{c}\\ u\\ v\\ w\\ z\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} e & f & g & h & i\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{array}$$

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul".)

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul".)

Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul”.)
Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.
Biz: k szerint indukcióval: $\forall k \times k$ részmx determinánsa $= 0, \pm 1$.
$k = 1$ ✓. Tfh $k - 1$-ig tudjuk, A pedig $k \times k$ részmx.

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak „indul”.)

Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.

Biz: k szerint indukcióval: $\forall k \times k$ részmx determinánsa $= 0, \pm 1$.

$k = 1$ ✓. Tfh $k - 1$-ig tudjuk, A pedig $k \times k$ részmx.

$\boxed{\text{I. eset}}$ A-nak van csupa 0 oszlopa. $\det A = 0$ ✓.

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul".)
Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.
Biz: k szerint indukcióval: $\forall k \times k$ részmx determinánsa $= 0, \pm 1$.
$k = 1$ ✓. Tfh $k - 1$-ig tudjuk, A pedig $k \times k$ részmx.
$\boxed{\text{I. eset}}$ A-nak van csupa 0 oszlopa. $\det A = 0$ ✓.
$\boxed{\text{II. eset}}$ A-nak van 1 db nemnullát tartalmazó oszlopa.
Kifejtési tétel és indukció miatt $\det A \in \{0, \pm 1\}$ ✓

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak „indul".)

Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.

Biz: k szerint indukcióval: $\forall k \times k$ részmx determinánsa $= 0, \pm 1$.
$k = 1$ ✓. Tfh $k - 1$-ig tudjuk, A pedig $k \times k$ részmx.
I. eset A-nak van csupa 0 oszlopa. $\det A = 0$ ✓.
II. eset A-nak van 1 db nemnullát tartalmazó oszlopa.
Kifejtési tétel és indukció miatt $\det A \in \{0, \pm 1\}$ ✓
III. eset A minden oszlopa 2 db nemnullát tartalmaz.
Ekkor A sorainak összege csupa0 sor, ezért $\det A = 0$ ✓. □

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul".)

Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G=(V,E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V|\times|E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul''.)

Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.

Köv: $G=(A,B;E)$ irányítatlan, páros gráf $\Rightarrow$ a $B(G)$ mx TU.

TU mátrix konstrukciója

Def: A $G = (V, E)$ (irányított) gráf $B(G)$ **illeszkedési mátrixa** olyan $|V| \times |E|$ mátrix, amiben a v sor e eleme 1, ha az e él v-ből indul, -1, ha v-be érkezik, 0 különben. (Ir.tatlan él csak ,,indul".)

Tétel: Tetsz. D digráf $B(D)$ illeszkedési mártrixa TU.

Köv: $G = (A, B; E)$ irányítatlan, páros gráf $\Rightarrow$ a $B(G)$ mx TU.

Biz: G éleit A-ból B-be irányítva kapjuk a D digráfot. A fenti tétel miatt $B(D)$ TU. $B(D)$-nek a B-hez tartozó sorait (-1)-gyel végigszorozva egyrészt TU mátrix, másrészt $B(G)$ adódik. $\square$

Maximális súlyú teljes párosítás páros gráfban

Adott $G = (V, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfv.

$$\boxed{\begin{array}{l} \max wx \\ x \in \mathbb{Z}^E \\ \begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ \tilde{x}(E(v)) & = & 1 \ \forall v \end{array} \end{array}}$$

Maximális súlyú teljes párosítás páros gráfban

Adott $G = (V, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfv.

$$\boxed{\begin{array}{l} \max wx \\ x \in \mathbb{Z}^E \\ \begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ \tilde{x}(E(v)) & = & 1 \ \forall v \end{array} \end{array}}$$

Az IP feladat a maximális súlyú teljes párosítás (karakterisztikus vektorának) keresése. Az együtthatómátrix $B(G)$, ami TU. Ezért az optimumok között van egész is: $\max_{IP} wx = \max_{LP} wx = \min_{DLP} y\underline{1}$.

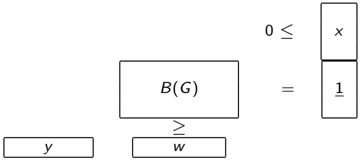
Maximális súlyú teljes párosítás páros gráfban

Adott $G = (V, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfv.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \max wx & & \\ x \in \mathbb{Z}^E & & \\ x & \geq & 0 \\ \tilde{x}(E(v)) & = & 1 \ \forall v \end{array}}$$

Az IP feladat a maximális súlyú teljes párosítás (karakterisztikus vektorának) keresése. Az együtthatómátrix $B(G)$, ami TU. Ezért az optimumok között van egész is: $\max_{IP} wx = \max_{LP} wx = \min_{DLP} y\underline{1}$.

Célszerűnek látszik felírni a DLP feladatot:



$$\boxed{\begin{array}{rcl} \min y \cdot \underline{1} & & \\ y \in \mathbb{R}^V & & \\ y(u) + y(v) & \geq & w(e) \\ \forall e = uv \in E & & \end{array}}$$

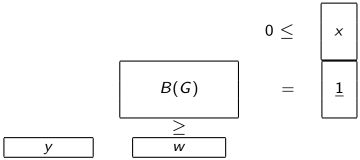
Maximális súlyú teljes párosítás páros gráfban

Adott $G = (V, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfv.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\max wx} \\ \multicolumn{3}{l}{x \in \mathbb{Z}^E} \\ x & \geq & 0 \\ \tilde{x}(E(v)) & = & 1 \ \forall v \end{array}}$$

Az IP feladat a maximális súlyú teljes párosítás (karakterisztikus vektorának) keresése. Az együtthatómátrix $B(G)$, ami TU. Ezért az optimumok között van egész is: $\max_{IP} wx = \max_{LP} wx = \min_{DLP} y\underline{1}$.

Célszerűnek látszik felírni a DLP feladatot:



$$\boxed{\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\min y \cdot \underline{1}} \\ \multicolumn{3}{c}{y \in \mathbb{R}^V} \\ y(u) + y(v) & \geq & w(e) \\ \multicolumn{3}{l}{\forall e = uv \in E} \end{array}}$$

Magic, magic: az y duálváltozók pontosan egy súlyozott lefogást írnak le. Ezek szerint a LP dualitástétel és a TU mátrixokról tanultak következménye, hogy páros gráfban a maximális súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a minimális összsúlyú súlyozott lefogás összsúlyával. Korábban ezt az Egerváry-algoritmussal bizonyítottuk, most pedig LP/IP módszerekkel igazoltuk.

Súlyozott párosítások a közgazdaságtanban

Adott a $G = (V, E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. A két színosztály csúcsai eladók ill. vevők. Minden eladó egy terméket árul, minden vevő egy terméket szeretne vásárolni.

Súlyozott párosítások a közgazdaságtanban

Adott a $G = (V, E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.
A két színosztály csúcsai eladók ill. vevők. Minden eladó egy terméket árul, minden vevő egy terméket szeretne vásárolni.
$w(ev)$: az e eladó termékének hasznossága a v vevő számára.
Párosítás súlya: az adott üzletek társadalmi összhasznossága.
Maximális súlyú párosítás: max társadalmi összhasznosság elérése.
$y(e)$: az e eladó termékének ára.

Súlyozott párosítások a közgazdaságtanban

Adott a $G = (V, E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.
A két színosztály csúcsai eladók ill. vevők. Minden eladó egy terméket árul, minden vevő egy terméket szeretne vásárolni.
$w(ev)$: az e eladó termékének hasznossága a v vevő számára.
Párosítás súlya: az adott üzletek társadalmi összhasznossága.
Maximális súlyú párosítás: max társadalmi összhasznosság elérése.
$y(e)$: az e eladó termékének ára.
$w(ev) - y(e)$: a v vevő profitja, ha megveszi az e eladó termékét.
$y(v)$:=(a v által elérhető maximális profit) $\Rightarrow$ y súlyozott lefogás.

Súlyozott párosítások a közgazdaságtanban

Adott a $G = (V, E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.
A két színosztály csúcsai eladók ill. vevők. Minden eladó egy terméket árul, minden vevő egy terméket szeretne vásárolni.
$w(ev)$: az e eladó termékének hasznossága a v vevő számára.
Párosítás súlya: az adott üzletek társadalmi összhasznossága.
Maximális súlyú párosítás: max társadalmi összhasznosság elérése.
$y(e)$: az e eladó termékének ára.
$w(ev) - y(e)$: a v vevő profitja, ha megveszi az e eladó termékét.
$y(v)$:=(a v által elérhető maximális profit) $\Rightarrow$ y súlyozott lefogás.
A maximális súlyú teljes párosításról szóló tétel szerint tetsz. w hasznosságokra van olyan árszínvonal ami mellett minden vevő egyszerre tudja maximalizálni a profitját.

Súlyozott párosítások a közgazdaságtanban

Adott a $G = (V, E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.
A két színosztály csúcsai eladók ill. vevők. Minden eladó egy terméket árul, minden vevő egy terméket szeretne vásárolni.
$w(ev)$: az e eladó termékének hasznossága a v vevő számára.
Párosítás súlya: az adott üzletek társadalmi összhasznossága.
Maximális súlyú párosítás: max társadalmi összhasznosság elérése.
$y(e)$: az e eladó termékének ára.
$w(ev) - y(e)$: a v vevő profitja, ha megveszi az e eladó termékét.
$y(v)$:=(a v által elérhető maximális profit) $\Rightarrow$ y súlyozott lefogás.
A maximális súlyú teljes párosításról szóló tétel szerint tetsz. w hasznosságokra van olyan árszínvonal ami mellett minden vevő egyszerre tudja maximalizálni a profitját.
Az Egerváry-algoritmus lépései:
$\boxed{1.}$ Pontos éleken párosítás növelése: az aktuális vásárlási sémához képest olyat találunk, amiben több vevő maximalizálja a profitját.

Súlyozott párosítások a közgazdaságtanban

Adott a $G = (V, E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.
A két színosztály csúcsai eladók ill. vevők. Minden eladó egy terméket árul, minden vevő egy terméket szeretne vásárolni.
$w(ev)$: az e eladó termékének hasznossága a v vevő számára.
Párosítás súlya: az adott üzletek társadalmi összhasznossága.
Maximális súlyú párosítás: max társadalmi összhasznosság elérése.
$y(e)$: az e eladó termékének ára.
$w(ev) - y(e)$: a v vevő profitja, ha megveszi az e eladó termékét.
$y(v)$:=(a v által elérhető maximális profit) $\Rightarrow$ y súlyozott lefogás.
A maximális súlyú teljes párosításról szóló tétel szerint tetsz. w hasznosságokra van olyan árszínvonal ami mellett minden vevő egyszerre tudja maximalizálni a profitját.
Az Egerváry-algoritmus lépései:
$\boxed{1.}$ Pontos éleken párosítás növelése: az aktuális vásárlási sémához képest olyat találunk, amiben több vevő maximalizálja a profitját.
$\boxed{2.}$ Súlyozott lefogás változtatása: egy adott termékkörre nagyobb a kínálat, mint a kereslet, ezért ezen termékkör ára csökken.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy az LP/DLP bár sok mindenre alkalmas, a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két problématípus között.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy az LP/DLP bár sok mindenre alkalmas, a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két problématípus között.

LP/DLP esetén van garantáltan polinomidejű algoritmus (az ún. ellipszoid módszer), ami a gyakorlatban elég ügyetlen. Ezzel szemben számos algoritmus -bár nem polinomidejű- pazarul működik. (Szimplex módszer változatai, criss-cross módszer . . .) Van ráadásul a gyakorlatban is jó működő, polinomidejű eljárás: Karmakar belső pontos módszere. Ezért az egészen nagyméretű (sokváltozós, rengeteg egyenlőtlenségből álló) problémák is jól kezelhetők a gyakorlatban.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy az LP/DLP bár sok mindenre alkalmas, a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két problématípus között.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy az LP/DLP bár sok mindenre alkalmas, a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két problématípus között.

IP/DIP esetén a probléma bizonyítottan reménytelen (NP-teljes problémát tartalmaz), így nem várható rá hatékony algoritmus. Vannak hasznos módszerek (branch and bound, branch and cut, vágósíkos módszerek, Lagrange-relaxáció, oszlopgenerálás, ...), de ezek nagy feladatokon nehezen boldogulnak. Ismert jópár heurisztika, ami sokat segíthet, de az igazán jól működők egy-egy cég szigorúan őrzött tudásbázisát képezik. A gyakorlatban sok múlhat azon, hogyan formalizáljuk a feladatot. Érdemes lehet nem egész változókat is megengedve az egészértekűségi feltételek számát alacsonyan tartani. IP megoldó algoritmusokra nincsenek értelmes lépésszámgaranciák: ezekről tapasztalati alapokon „tudjuk" hogy jól vagy rosszul működnek egy-egy feladattípusra.

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.
A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. Egy x folyam a G gráf minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. Egy x folyam a G gráf minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. Egy x folyam a G gráf minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \ \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. Egy x folyam a G gráf minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \ \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

$\tilde{x}(E_{ki}(v)) - \tilde{x}(E_{be}(v)) = 0 \ \forall v \neq s, t$ Kirchhoff-szabály

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. Egy x folyam a G gráf minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \; \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \; \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

$\tilde{x}(E_{ki}(v)) - \tilde{x}(E_{be}(v)) = 0 \; \forall v \neq s, t$ Kirchhoff-szabály

A cél persze a folyam nagyságának (azaz az s-ből kilépő nettó folyammennyiségnek) a maximalizálása:

$\max \tilde{x}(E_{ki}(s)) - \tilde{x}(E_{be}(s))$

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkamazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. Egy x folyam a G gráf minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \ \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

$\tilde{x}(E_{ki}(v)) - \tilde{x}(E_{be}(v)) = 0 \ \forall v \neq s, t$ Kirchhoff-szabály

A cél persze a folyam nagyságának (azaz az s-ből kilépő nettó folyammennyiségnek) a maximalizálása:

$\max \tilde{x}(E_{ki}(s)) - \tilde{x}(E_{be}(s))$

Nahát: ez egy LP! Nosza, nézzük meg, mi a duálisa!

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & E & & \\
 & & x \geq 0 & & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s,t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & & \\
 & & 1 \;\; -1 \;\; 0 & &
\end{array}
$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$
\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s,t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \;\; -1 \;\; 0 &
\end{array}
$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényegyüttható tartozik.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$
\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\ \cline{3-3}
E & y \geq 0 & \multicolumn{1}{|c|}{I} & \leq c \\ \cline{3-3}
V-s,t & \pi & \multicolumn{1}{|c|}{B'(G)} & = 0 \\ \cline{3-3}
 & & \geq & \\
 & & 1 \;\; -1 \; 0 &
\end{array}
$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényegyüttható tartozik. Ezért a duálisváltozók kétfélék: nemnegatív y-ok tartoznak az élekhez, és előjelkötetlen π (potenciálok) a nemterminális (s, t-től különböző) csúcsokhoz.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$\begin{array}{l}
\min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\
y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv \\
y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us \\
y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv \\
y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut \\
y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv \\
\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c}
 & & & E & \\
 & & & x \geq 0 & \\
\cline{4-4}
E & & y \geq 0 & I & \leq c \\
\cline{4-4}
V - s, t & & \pi & B'(G) & = 0 \\
\cline{4-4}
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\geq} & \\
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1 \ \ -1 \ 0} &
\end{array}$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényegyüttható tartozik. Ezért a duálisváltozók kétfélék: nemnegatív y-ok tartoznak az élekhez, és előjelkötetlen π (potenciálok) a nemterminális (s, t-től különböző) csúcsokhoz. A duális probléma pedig balra fent látható.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$\begin{aligned}
&\min yc \qquad\qquad y \geq 0\\
&y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv\\
&y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us\\
&y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv\\
&y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut\\
&y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv\\
&\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
\cline{3-3}
E & y \geq 0 & I & \leq c \\
\cline{3-3}
V - s, t & \pi & B'(G) & = 0 \\
\cline{3-3}
 & & \geq & \\
 & & 1 \;\; -1 \;\; 0 &
\end{array}$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhöz -1, a többihez 0 célfüggvényegyüttható tartozik. Ezért a duálisváltozók kétfélék: nemnegatív y-ok tartoznak az élekhez, és előjelkötetlen π (potenciálok) a nemterminális (s, t-től különböző) csúcsokhoz. A duális probléma pedig balra fent látható. Mivel az s, t terminálokhoz nem tartozik potenciál, ezért a duális feltételek sokfélék.

Maxfolyam duális kalapálás

$$\min yc \qquad\qquad y \geq 0$$
$$y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv$$
$$y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us$$
$$y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv$$
$$y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut$$
$$y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0$$
$$\forall e = uv, \{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \ \ -1 \ \ 0 &
\end{array}$$

Maxfolyam duális kalapálás

$$
\begin{array}{l}
\min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\
y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv \\
y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us \\
y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv \\
y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut \\
y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \\
\forall e = uv, \{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \ -1 \ 0 &
\end{array}
$$

Érdemes bevezetni a $\pi(s) = -1$ és $\pi(t) = 0$ potenciálokat, amivel az ötféle feltétel egyfélére egyszerűsödik:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\
y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv \\
\pi(s) = -1, \quad \pi(t) = 0
\end{array}
}
$$

Maxfolyam duális kalapálás

$$
\begin{aligned}
&\min yc \qquad\qquad y \geq 0\\
&y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv\\
&y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us\\
&y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv\\
&y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut\\
&y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0\\
&\forall e = uv, \{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c|c}
 & & & E & \\
 & & & x \geq 0 & \\
\cline{4-4}
E & & y \geq 0 & I & \leq c \\
\cline{4-4}
V - s, t & & \pi & B'(G) & = 0 \\
\cline{4-4}
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\geq} & \\
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1 \ -1 \ 0} &
\end{array}
$$

Érdemes bevezetni a $\pi(s) = -1$ és $\pi(t) = 0$ potenciálokat, amivel az ötféle feltétel egyfélére egyszerűsödik:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\min yc \qquad\qquad y \geq 0\\
y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv\\
\pi(s) = -1, \ \ \pi(t) = 0
\end{array}
}
$$

Magyarul: úgy kell az élekre nemnegatív számokat írni, hogy minden élre írt szám legalább annyi legyen, mint az él végpontjai közti potenciálugrás. (A potenciálokat szabadon választhatjuk azzal a megkötéssel, hogy s potenciálja -1 és t-é pedig 0.)

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{l} \min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv \\ \pi(s) = -1, \qquad \pi(t) = 0 \end{array}}$$

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$\min yc$	$y \geq 0$
$y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \; \forall e = uv$	
$\pi(s) = -1,$	$\pi(t) = 0$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk. Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \; \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális duálmegoldást.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$\min yc$	$y \geq 0$
$y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \; \forall e = uv$	
$\pi(s) = -1,$	$\pi(t) = 0$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk.
Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.
Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.
E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális duálmegoldást.
Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \; \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális duálmegoldást. Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális duálmegoldást. Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.

Jelölje $X := \pi^{-1}(-1)$ a -1 potenciálú csúcsok halmazát. Csak az X-ből kilépő élek mentén nő a potenciál: y csak ezeken vesz fel 1 értéket. Mivel $s \in X \not\ni t$, X egy st-vágást határoz meg, így a célfüggvényérték pontosan az X-ből kilépő élek összkapacitása.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális duálmegoldást. Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.

Jelölje $X := \pi^{-1}(-1)$ a -1 potenciálú csúcsok halmazát. Csak az X-ből kilépő élek mentén nő a potenciál: y csak ezeken vesz fel 1 értéket. Mivel $s \in X \not\ni t$, X egy st-vágást határoz meg, így a célfüggvényérték pontosan az X-ből kilépő élek összkapacitása.

A dualitástételből pedig közvetlenül adódik a Ford-Fulkerson-tétel.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből sortörlésekkel és egységvektor sorok és oszlopok hozzáadásával kapjuk. Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális duálmegoldást. Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.

Jelölje $X := \pi^{-1}(-1)$ a -1 potenciálú csúcsok halmazát. Csak az X-ből kilépő élek mentén nő a potenciál: y csak ezeken vesz fel 1 értéket. Mivel $s \in X \not\ni t$, X egy st-vágást határoz meg, így a célfüggvényérték pontosan az X-ből kilépő élek összkapacitása.

A dualitástételből pedig közvetlenül adódik a Ford-Fulkerson-tétel.

Győztünk!

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.
- TU mátrixok és LP feladat egész megoldásának kapcsolata

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.
- TU mátrixok és LP feladat egész megoldásának kapcsolata
- Irányított gráf ill. páros gráf illeszkedési mátrixának TU tulajdonsága

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.
- TU mátrixok és LP feladat egész megoldásának kapcsolata
- Irányított gráf ill. páros gráf illeszkedési mátrixának TU tulajdonsága
- Páros gráfok maximális súlyú párosítására vonatkozó minmax tétel levezetése a dualitástételből a TU tulajdonság felhasználásával

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.
- TU mátrixok és LP feladat egész megoldásának kapcsolata
- Irányított gráf ill. páros gráf illeszkedési mátrixának TU tulajdonsága
- Páros gráfok maximális súlyú párosítására vonatkozó minmax tétel levezetése a dualitástételből a TU tulajdonság felhasználásával
- Piaci mechanizmusok az Egerváry-algoritmus hátterében

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.
- TU mátrixok és LP feladat egész megoldásának kapcsolata
- Irányított gráf ill. páros gráf illeszkedési mátrixának TU tulajdonsága
- Páros gráfok maximális súlyú párosítására vonatkozó minmax tétel levezetése a dualitástételből a TU tulajdonság felhasználásával
- Piaci mechanizmusok az Egerváry-algoritmus hátterében
- A Ford-Fulkerson-tétellevezetése a dualitástételből a TU tulajdonság felhasználásával

Mit tanultunk ma?

- IP feladat fogalma, a páros gráf maximális súlyú teljes párosítása ilyen.
- TU mátrixok és LP feladat egész megoldásának kapcsolata
- Irányított gráf ill. páros gráf illeszkedési mátrixának TU tulajdonsága
- Páros gráfok maximális súlyú párosítására vonatkozó minmax tétel levezetése a dualitástételből a TU tulajdonság felhasználásával
- Piaci mechanizmusok az Egerváry-algoritmus hátterében
- A Ford-Fulkerson-tétellevezetése a dualitástételből a TU tulajdonság felhasználásával

Ennyit mára a természettudományok újdonságaiból, érdekességeiből