Kombinatorikus optimalizálás

Egerváry magyar módszere

2023. március 14.

Mit tudunk?

Ezt láttuk a múlt héten:

- Hálózati folyamok, MFMC tétel, folyamalgoritmus.
- Ha egy folyam nagysága megegyezik egy *st*-vágás kapacitásával, akkor ezek egymás optimalitását bizonyítják.
- Gráf, páros gráf, színosztály, párosítás.
- Páros gráfok reprezentációja 0/1-mátrixszal, párosítások és bástyaelhelyezések kapcsolata.
- Páros gráf maximális párosításának és maximális nagyságú folyam kapcsolata.
- Páros gráf maximális párosításának keresése: alternáló utas algoritmus a gráfon ill. a mátrixreprezentáción.

Mit tudunk?

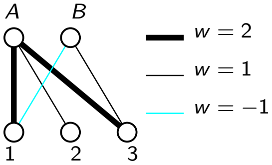
Ezt láttuk a múlt héten:

- Hálózati folyamok, MFMC tétel, folyamalgoritmus.
- Ha egy folyam nagysága megegyezik egy st-vágás kapacitásával, akkor ezek egymás optimalitását bizonyítják.
- Gráf, páros gráf, színosztály, párosítás.
- Páros gráfok reprezentációja $0/1$-mátrixszal, párosítások és bástyaelhelyezések kapcsolata.
- Páros gráf maximális párosításának és maximális nagyságú folyam kapcsolata.
- Páros gráf maximális párosításának keresése: alternáló utas algoritmus a gráfon ill. a mátrixreprezentáción.

Az alábbi konvenciót fogjuk követni.

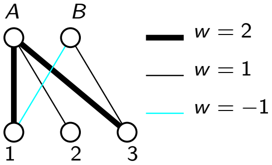
Def: Ha $f : X \to \mathbb{R}$ valós értékű függvény, akkor tetsz. $Y \subseteq X$ részhalmazra $\tilde{f}(Y) := \sum\{f(y) : y \in Y\}$ jelöli az összegfüggvényt.

Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

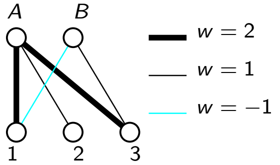
Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf: (1) A maximális súlyú párosítás $w \equiv 1$ esetén a maximális méretű párosítást jelenti. Ezért a maximális méretű párosítás keresése a maximális súlyú párosítás keresésének speciális esete. A továbbiakban ez utóbbi feladatot tanulmányozzuk, de csak páros gráf esetén. (Nem páros gráfokra ugyanez a feladat –bár sokkal bonyolultabb– szerencsére még jól kezelhető.)

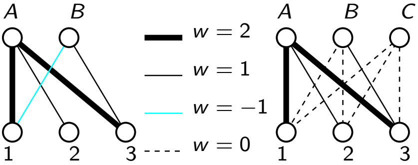
Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf:

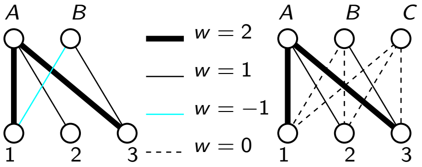
Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf: (2) Páros gráfban maximális súlyú párosítás keresése felfogható egy teljes páros gráf (azaz $K_{n,n}$) maximális súlyú teljes párosításának kereséseként is: elhagyjuk G negatív súlyú éleit, G kisebbik színosztályát kiegészítjük a nagyobbik méretére, valamint a hiányzó éleket 0 súlyú éleknek tekintjük.

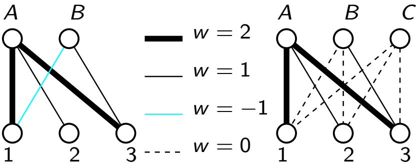
Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf:

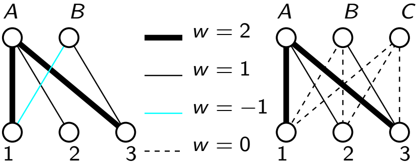
Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf: (3) Maximális súlyú teljes párosítás keresésekor feltehető, hogy $w(e) \geq 0$ $(\forall e \in E(G))$, azaz minden élköltség nemnegatív. Ha ugyanis minden él költségét p-vel megnöveljük, akkor ettől minden egyes teljes párosítás súlya pn-nel növekszik (ahol $|V(G)| = 2n$), így a növelések utáni teljes párosítások között pontosan az lesz maximális súlyú, ami a növelések előtt is az volt.

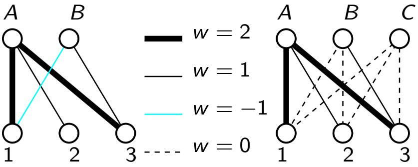
Súlyozott párosítások



Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf:

Súlyozott párosítások



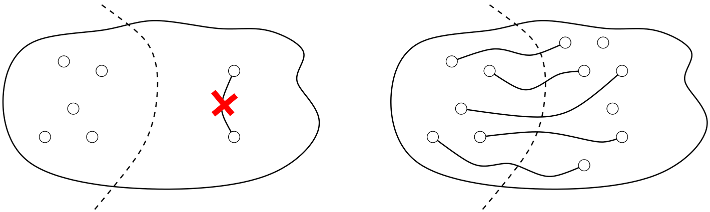
	A	B
1	2	−1
2	1	X
3	2	1

	A	B	C
1	2	0	0
2	1	0	0
3	2	1	0

Def: Legyen $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ egy élsúlyozása. Az $M \subseteq E$ **élhalmaz súlya** $\tilde{w}(M)$. Az M egy **maximális súlyú (teljes) párosítás**, ha M a G (teljes) párosítása, és $\tilde{w}(M) \geq \tilde{w}(M')$ teljesül G minden M' (teljes) párosítására.

Megf: (4) Élsúlyozott teljes páros gráf mátrixszal reprezentálható: a sorok az egyik, az oszlopok a másik színosztály csúcsainak felelnek meg, a mátrix elemei pedig az egyes élek súlyát jelentik. Ebben a reprezentációban a maximális súlyú teljes párosítás annak felel meg, hogy egy $n \times n$ méretű négyzetes mátrixban akarunk n bástyát úgy elhelyezni, hogy a bástyák által elfoglalt mezőkön álló számok összege a lehető legnagyobb legyen.

Párosítások és lefogások

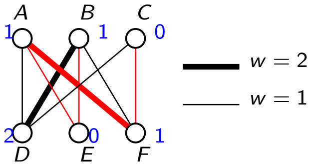


$\nu \leq \tau$: ha k csúcs lefogja G minden élét, akkor G legfeljebb k ftn élt tartalmaz. Ha tehát találunk egy k méretű párosítást és egy k pontú lefogó ponthalmazt, akkor $\nu \geq k \geq \tau \geq \nu \Rightarrow \nu = \tau = k$.
Páros gráf esetén nem is kell ennél több.
Kőnig-tétel: Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$, azaz a független élek maximális száma megegyezik a lefogó ponthalmaz minimális méretével. $\square$
Élsúlyozott esetben is igaz vmi hasonló minmax egyenlőség?

Párosítások és lefogások

Párosítások és lefogások

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ esetén $c : V \to \mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e) \leq c(u) + c(v)$ $\forall uv = e \in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e = uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e) = c(u) + c(v)$.



Párosítások és lefogások

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ esetén $c : V \to \mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e) \leq c(u) + c(v)$ $\forall uv = e \in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e = uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e) = c(u) + c(v)$.

Párosítások és lefogások

Def: Adott $G=(V,E)$ gráf és $w:E\to\mathbb{R}_+$ esetén $c:V\to\mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e)\le c(u)+c(v)\ \forall uv=e\in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e=uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e)=c(u)+c(v)$.

Megf: (1) Ha c a $G=(V,E)$ gráf egy w élsúlyozásához tartozó súlyozott lefogás és M a G egy párosítása, akkor $\tilde{w}(M)=\sum\{w(e):e\in M\}\le\sum\{c(u)+c(v):e=uv\in M\}\le\tilde{c}(V)$

Párosítások és lefogások

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ esetén $c : V \to \mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e) \le c(u) + c(v)\ \forall uv = e \in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e = uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e) = c(u) + c(v)$.

Megf: (1) Ha c a $G = (V, E)$ gráf egy w élsúlyozásához tartozó súlyozott lefogás és M a G egy párosítása, akkor $\tilde{w}(M) = \sum\{w(e) : e \in M\} \le \sum\{c(u) + c(v) : e = uv \in M\} \le \tilde{c}(V)$

(2) M pontos élekből álló **teljes** párosítás $\Rightarrow \tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.

Párosítások és lefogások

Def: Adott $G=(V,E)$ gráf és $w:E\to\mathbb{R}_+$ esetén $c:V\to\mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e)\leq c(u)+c(v)\ \forall uv=e\in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e=uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e)=c(u)+c(v)$.

Megf: (1) Ha c a $G=(V,E)$ gráf egy w élsúlyozásához tartozó súlyozott lefogás és M a G egy párosítása, akkor $\tilde{w}(M)=\sum\{w(e):e\in M\}\leq\sum\{c(u)+c(v):e=uv\in M\}\leq\tilde{c}(V)$

(2) M pontos élekből álló **teljes** párosítás $\Rightarrow \tilde{w}(M)=\tilde{c}(V)$.

(3) Ha $\tilde{w}(M)=\tilde{c}(V)$, akkor M maximális súlyú párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.

Párosítások és lefogások

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ esetén $c : V \to \mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e) \le c(u) + c(v)$ $\forall uv = e \in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e = uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e) = c(u) + c(v)$.

Megf: (1) Ha c a $G = (V, E)$ gráf egy w élsúlyozásához tartozó súlyozott lefogás és M a G egy párosítása, akkor $\tilde{w}(M) = \sum\{w(e) : e \in M\} \le \sum\{c(u) + c(v) : e = uv \in M\} \le \tilde{c}(V)$
(2) M pontos élekből álló **teljes** párosítás $\Rightarrow \tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.
(3) Ha $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$, akkor M maximális súlyú párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.

Egerváry tétele: Tetszőleges $G = (V, E)$ **páros** gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozás esetén létezik G-nek olyan M párosítása és c súlyozott lefogása, amire $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.

Párosítások és lefogások

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ esetén $c : V \to \mathbb{R}_+$ ~~címkézés~~ **súlyozott lefogás**, ha $w(e) \leq c(u) + c(v)$ $\forall uv = e \in E$, azaz egyetlen él súlya sem több a végpontjaihoz rendelt értékek összegénél. Az $e = uw$ ~~piros~~ **pontos él**, ha $w(e) = c(u) + c(v)$.

Megf: (1) Ha c a $G = (V, E)$ gráf egy w élsúlyozásához tartozó súlyozott lefogás és M a G egy párosítása, akkor $\tilde{w}(M) = \sum\{w(e) : e \in M\} \leq \sum\{c(u) + c(v) : e = uv \in M\} \leq \tilde{c}(V)$
(2) M pontos élekből álló **teljes** párosítás $\Rightarrow \tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.
(3) Ha $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$, akkor M maximális súlyú párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.

Egerváry tétele: Tetszőleges $G = (V, E)$ **páros** gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozás esetén létezik G-nek olyan M párosítása és c súlyozott lefogása, amire $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.

Cél: Az Egerváry-féle magyar módszer bemutatása, aminek segítségével a $K_{n,n}$ teljes páros gráf tetszőleges nemnegatív élsúlyozásához maximális súlyú teljes párosítást és minimális összsúlyú súlyozott lefogást találunk.

A magyar módszer

Egerváry algoritmusa Input: nemnegatív $n \times n$-es mátrix Output: Egy n bástyából álló bástyaelhelyezés ill. egy súlyozott lefogás, aminek összsúlya megegyezik a bástyák mezőinek összértékével.

A magyar módszer

Egerváry algoritmusa Input: nemnegatív $n \times n$-es mátrix Output: Egy n bástyából álló bástyaelhelyezés ill. egy súlyozott lefogás, aminek összsúlya megegyezik a bástyák mezőinek összértékével.
Működés: Egy 0 bástyából álló bástyaelhelyezésből és abból a súlyozott lefogásból indulunk ki, ami minden sorhoz 0-t, az oszlopokhoz pedig az egyes oszlopmaximumokat rendeli.

A magyar módszer

Egerváry algoritmusa Input: nemnegatív $n \times n$-es mátrix Output: Egy n bástyából álló bástyaelhelyezés ill. egy súlyozott lefogás, aminek összsúlya megegyezik a bástyák mezőinek összértékével.
Működés: Egy 0 bástyából álló bástyaelhelyezésből és abból a súlyozott lefogásból indulunk ki, ami minden sorhoz 0-t, az oszlopokhoz pedig az egyes oszlopmaximumokat rendeli.

1. Pontos élekből álló maximális párosítást keresünk a (múlt héten tanult) alternáló utas algoritmus segítségével.
   (Tkp a pontos mezőkre elhelyezzük a lehető legtöbb bástyát.)

A magyar módszer

Egerváry algoritmusa Input: nemnegatív $n \times n$-es mátrix Output: Egy n bástyából álló bástyaelhelyezés ill. egy súlyozott lefogás, aminek összsúlya megegyezik a bástyák mezőinek összértékével.
Működés: Egy 0 bástyából álló bástyaelhelyezésből és abból a súlyozott lefogásból indulunk ki, ami minden sorhoz 0-t, az oszlopokhoz pedig az egyes oszlopmaximumokat rendeli.

1. Pontos élekből álló maximális párosítást keresünk a (múlt héten tanult) alternáló utas algoritmus segítségével. (Tkp a pontos mezőkre elhelyezzük a lehető legtöbb bástyát.)
2. Ha teljes párosítást találtunk (azaz ha n bástyát sikerült elhelyezni), kész vagyunk.

A magyar módszer

Egerváry algoritmusa Input: nemnegatív $n \times n$-es mátrix Output: Egy n bástyából álló bástyaelhelyezés ill. egy súlyozott lefogás, aminek összsúlya megegyezik a bástyák mezőinek összértékével.
Működés: Egy 0 bástyából álló bástyaelhelyezésből és abból a súlyozott lefogásból indulunk ki, ami minden sorhoz 0-t, az oszlopokhoz pedig az egyes oszlopmaximumokat rendeli.

1. Pontos élekből álló maximális párosítást keresünk a (múlt héten tanult) alternáló utas algoritmus segítségével. (Tkp a pontos mezőkre elhelyezzük a lehető legtöbb bástyát.)
2. Ha teljes párosítást találtunk (azaz ha n bástyát sikerült elhelyezni), kész vagyunk.
3. Ha nem teljes a párosítás, akkor a lefogás összsúlyát csökkentjük. A fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopok X halmazára $|X| > |N(X)|$. Az X-beli oszlopokon ε-nal csökkentjük, az $N(X)$-beli sorokon pedig ε-nal növeljük a súlyozott lefogást. A lehető legnagyobb olyan ε-t választjuk, ami még súlyozott lefogást ad. GoTo 1.

Egy konkrét példa

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

Ez a feladat inputja.

Egy konkrét példa

	1	2	3	4	
A	2	2	6	3	0
B	7	5	9	8	0
C	5	2	7	3	0
D	7	3	9	5	0
	7	5	9	8	

Kiindulunk egy súlyozott lefogásból, és megjelöljük a pontos éleket.

Egy konkrét példa

	1	2	3	4	
A	2	2	6	3	0
B	$\boxed{7}$	5	9	8	0
C	5	2	7	3	0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0
	7	5	9	8	

$\tilde{w}(M) = 16, \tilde{c}(V) = 29.$

Pontos élekből max párosítást keresünk.

Egy konkrét példa

	1	**2**	**3**	**4**	
A	2	2	6	3	0
B	$\boxed{7}$	5	9	8	0
C	5	2	7	3	0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0
	7	5	9	8	

$\tilde{w}(M) = 16, \tilde{c}(V) = 29.$

Megkeressük a fedetlen oszlopokból pontos éleken és párosításéleken lépcsősen elérhető sorokat és oszlopokat. C3 miatt ε nem lehet 2-nél nagyobb, de az $\varepsilon = 2$ még megfelel.

Egy konkrét példa

	1	2	3	4		
A	2	2	6	3	0	0
B	$\boxed{7}$	5	9	8	0	2
C	5	2	7	3	0	0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0	2
	7	5	9	8		
	5	3	7	6		

$\tilde{w}(M) = 16, \tilde{c}(V) = 25.$

Az új súlyozott lefogás mellett megváltozik a pontos élek halmaza, így a B4,B1,C1 útvonalon növelni tudjuk a párosítást.

Egy konkrét példa

	1	2	3	4		
A	2	2	6	3	0	0
B	7	5	9	$\boxed{8}$	0	2
C	$\boxed{5}$	2	7	3	0	0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0	2
	7	5	9	8		
	5	3	7	6		

$\tilde{w}(M) = 22, \tilde{c}(V) = 25.$

Ismét megjelöljük a fedetlen oszlopokból elérhető sorokat és oszlopokat. A2 miatt ε nem lehet 1-nél több, de $\varepsilon = 1$ még jó.

Egy konkrét példa

	1	2	3	4			
A	2	2	6	3	0	0	0
B	7	5	9	$\boxed{8}$	0	2	3
C	$\boxed{5}$	2	7	3	0	0	0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0	2	2
	7	5	9	8			
	5	3	7	6			
	5	2	7	5			

$\tilde{w}(M) = 22, \tilde{c}(V) = 24.$

Az új súlyozott lefogás mellett ismét megváltozik a pontos élek halmaza.

Egy konkrét példa

	1	2	3	4			
A	2	$\boxed{2}$	6	3	0	0	0
B	7	5	9	$\boxed{8}$	0	2	3
C	$\boxed{5}$	2	7	3	0	0	0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0	2	2
	7	5	9	8			
	5	3	7	6			
	5	2	7	5			

$\tilde{w}(M) = 24, \tilde{c}(V) = 24.$

Könnyű dolgunk van: A2 pontos él, és ez bevehető a párosításba.

Pontos élekből álló teljes párosítást kaptunk. A súlyozott lefogás bizonyíték a kapott teljes párosítás maximális súlyú voltára, a teljes párosítás pedig a súlyozott lefogás minimális összsúlyára.
Egyszóval: győztünk.

Történelem

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogásával.

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogáséval.
- 1953: Harold Kuhn amerikai matematikus Kőnig könyvében meglátta az Egerváry eredményét említő lábjegyzetet.

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogásával.
- 1953: Harold Kuhn amerikai matematikus Kőnig könyvében meglátta az Egerváry eredményét említő lábjegyzetet.
- Megszerezte hát a hivatkozott folyóiratot, kölcsönzött egy magyar-angol szótárt és egy nyelvtankönyvet.

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogáséval.
- 1953: Harold Kuhn amerikai matematikus Kőnig könyvében meglátta az Egerváry eredményét említő lábjegyzetet.
- Megszerezte hát a hivatkozott folyóiratot, kölcsönzött egy magyar-angol szótárt és egy nyelvtankönyvet.
- Kuhn röpke két hét alatt lefordította magának a cikket.

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogásával.
- 1953: Harold Kuhn amerikai matematikus Kőnig könyvében meglátta az Egerváry eredményét említő lábjegyzetet.
- Megszerezte hát a hivatkozott folyóiratot, kölcsönzött egy magyar-angol szótárt és egy nyelvtankönyvet.
- Kuhn röpke két hét alatt lefordította magának a cikket.
- A cikk alapján megalkotott módszer pazarul működött: több 12×12-es, háromjegyű egészekkel kitöltött mátrixra két órán belül sikerült kizárólag papír és ceruza felhasználásával megtalálni az optimumot.

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogásával.
- 1953: Harold Kuhn amerikai matematikus Kőnig könyvében meglátta az Egerváry eredményét említő lábjegyzetet.
- Megszerezte hát a hivatkozott folyóiratot, kölcsönzött egy magyar-angol szótárt és egy nyelvtankönyvet.
- Kuhn röpke két hét alatt lefordította magának a cikket.
- A cikk alapján megalkotott módszer pazarul működött: több 12×12-es, háromjegyű egészekkel kitöltött mátrixra két órán belül sikerült kizárólag papír és ceruza felhasználásával megtalálni az optimumot.
- Ennek örömére Kuhn az eljárást Hungarian method-nak keresztelte, és azóta is így hívják szerte a világon.

Történelem

- 1931: Egerváry Jenő tétele szerint a max súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a min súlyú súlyozott lefogásével.
- 1953: Harold Kuhn amerikai matematikus Kőnig könyvében meglátta az Egerváry eredményét említő lábjegyzetet.
- Megszerezte hát a hivatkozott folyóiratot, kölcsönzött egy magyar-angol szótárt és egy nyelvtankönyvet.
- Kuhn röpke két hét alatt lefordította magának a cikket.
- A cikk alapján megalkotott módszer pazarul működött: több 12×12-es, háromjegyű egészekkel kitöltött mátrixra két órán belül sikerült kizárólag papír és ceruza felhasználásával megtalálni az optimumot.
- Ennek örömére Kuhn az eljárást Hungarian method-nak keresztelte, és azóta is így hívják szerte a világon.
- Ford és Fulkerson arról számoltak be, hogy egy 20×20-as táblázat esetében kézzel számolva fél órán belül kész voltak, míg a korabeli számítógépeknek (az akkor ismert legjobb algoritmussal) ugyanerre a feladatra több, mint egy óra kellett.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Páros gráf maximális súlyú (teljes) párosításának keresése visszavezethető a $K_{n,n}$ teljes páros gráf nemnegatív élsúlyok melletti teljes párosításának keresésére.

Mit tanultunk ma?

- Páros gráf maximális súlyú (teljes) párosításának keresése visszavezethető a $K_{n,n}$ teljes páros gráf nemnegatív élsúlyok melletti teljes párosításának keresésére.
- A Kőnig-tétel $\nu = \tau$ egyenlőségében ν-nek a max. súlyú párosítás, a τ-nak pedig a minimális összsúlyú súlyozott lefogás felel meg.

Mit tanultunk ma?

- Páros gráf maximális súlyú (teljes) párosításának keresése visszavezethető a $K_{n,n}$ teljes páros gráf nemnegatív élsúlyok melletti teljes párosításának keresésére.
- A Kőnig-tétel $\nu = \tau$ egyenlőségében ν-nek a max. súlyú párosítás, a τ-nak pedig a minimális összsúlyú súlyozott lefogás felel meg.
- Súlyozott lefogás összsúlya sosem kisebb teljes párosítás súlyánál. Ha egyenlőség áll, akkor a teljes párosítás pontos élekből áll és maximális súlyú, a súlyozott lefogás pedig minimális összsúlyú.

Mit tanultunk ma?

- Páros gráf maximális súlyú (teljes) párosításának keresése visszavezethető a $K_{n,n}$ teljes páros gráf nemnegatív élsúlyok melletti teljes párosításának keresésére.
- A Kőnig-tétel $\nu = \tau$ egyenlőségében ν-nek a max. súlyú párosítás, a τ-nak pedig a minimális összsúlyú súlyozott lefogás felel meg.
- Súlyozott lefogás összsúlya sosem kisebb teljes párosítás súlyánál. Ha egyenlőség áll, akkor a teljes párosítás pontos élekből áll és maximális súlyú, a súlyozott lefogás pedig minimális összsúlyú.
- A magyar módszer egy súlyozott lefogásból és egy pontos élek alkotta (üres) párosításból indul ki.

Mit tanultunk ma?

- Páros gráf maximális súlyú (teljes) párosításának keresése visszavezethető a $K_{n,n}$ teljes páros gráf nemnegatív élsúlyok melletti teljes párosításának keresésére.
- A Kőnig-tétel $\nu = \tau$ egyenlőségében ν-nek a max. súlyú párosítás, a τ-nak pedig a minimális összsúlyú súlyozott lefogás felel meg.
- Súlyozott lefogás összsúlya sosem kisebb teljes párosítás súlyánál. Ha egyenlőség áll, akkor a teljes párosítás pontos élekből áll és maximális súlyú, a súlyozott lefogás pedig minimális összsúlyú.
- A magyar módszer egy súlyozott lefogásból és egy pontos élek alkotta (üres) párosításból indul ki.
- Minden lépésben vagy növeli a pontos élekből álló párosítás méretét vagy csökkenti a súlyozott lefogás összsúlyát.

Mit tanultunk ma?

- Páros gráf maximális súlyú (teljes) párosításának keresése visszavezethető a $K_{n,n}$ teljes páros gráf nemnegatív élsúlyok melletti teljes párosításának keresésére.
- A Kőnig-tétel $\nu = \tau$ egyenlőségében ν-nek a max. súlyú párosítás, a τ-nak pedig a minimális összsúlyú súlyozott lefogás felel meg.
- Súlyozott lefogás összsúlya sosem kisebb teljes párosítás súlyánál. Ha egyenlőség áll, akkor a teljes párosítás pontos élekből áll és maximális súlyú, a súlyozott lefogás pedig minimális összsúlyú.
- A magyar módszer egy súlyozott lefogásból és egy pontos élek alkotta (üres) párosításból indul ki.
- Minden lépésben vagy növeli a pontos élekből álló párosítás méretét vagy csökkenti a súlyozott lefogás összsúlyát.
- Ha már nem lehet ilyen lépést végezni, akkor pontos élekből álló teljes párosításunk van, ami a fentiek miatt max súlyú.

Köszönöm a figyelmet!