# Kombinatorikus optimalizálás

Gráfok színezései

2023. február 28.

# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.

# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.
- A cél néhány, az optimalizálás során alkalmazott matematikai módszer felvillantása.

# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.
- A cél néhány, az optimalizálás során alkalmazott matematikai módszer felvillantása.
- Gyakorlat: Cs **8:30**-10:00, R504 & R505

# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.
- A cél néhány, az optimalizálás során alkalmazott matematikai módszer felvillantása.
- Gyakorlat: Cs **8:30**-10:00, R504 & R505
- ZH: 4 feladat, 90 perc, 50 pont. A két ZH, és két pZH időpontjai később derülnek ki.

# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.
- A cél néhány, az optimalizálás során alkalmazott matematikai módszer felvillantása.
- Gyakorlat: Cs **8:30**-10:00, R504 & R505
- ZH: 4 feladat, 90 perc, 50 pont. A két ZH, és két pZH időpontjai később derülnek ki.
- ZH 20 ponttól sikeres, két sikeres ZH után megajánlott jegy. Ponthatárok: 2: 40, 3: 55, 4: 70, 5: 85. Szóbeli: legfeljebb 1 jegyet lehet javítani.

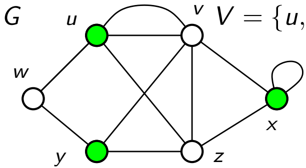
# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.
- A cél néhány, az optimalizálás során alkalmazott matematikai módszer felvillantása.
- Gyakorlat: Cs **8:30**-10:00, R504 & R505
- ZH: 4 feladat, 90 perc, 50 pont. A két ZH, és két pZH időpontjai később derülnek ki.
- ZH 20 ponttól sikeres, két sikeres ZH után megajánlott jegy. Ponthatárok: 2: 40, 3: 55, 4: 70, 5: 85. Szóbeli: legfeljebb 1 jegyet lehet javítani.
- Elsődleges információforrás a kurzushonlap: `www.cs.bme.hu/villkombopt`.
  Sürgős tudnivalók neptun-üzenetben érkezhetnek.

# Tudnivalók

- Kombinatorikus struktúrákon (főleg gráfokon) történő optimalizálással foglalkozunk a kurzuson.
- A cél néhány, az optimalizálás során alkalmazott matematikai módszer felvillantása.
- Gyakorlat: Cs **8:30**-10:00, R504 & R505
- ZH: 4 feladat, 90 perc, 50 pont. A két ZH, és két pZH időpontjai később derülnek ki.
- ZH 20 ponttól sikeres, két sikeres ZH után megajánlott jegy. Ponthatárok: 2: 40, 3: 55, 4: 70, 5: 85. Szóbeli: legfeljebb 1 jegyet lehet javítani.
- Elsődleges információforrás a kurzushonlap: `www.cs.bme.hu/villkombopt`.
  Sürgős tudnivalók neptun-üzenetben érkezhetnek.
- Segédanyagok: (Javított) előadás diasorok a kurzushonlapon, Jordán-Recski-Szeszlér: Rendszeroptimalizálás (typotex), `https://interkonyv.hu/konyvek/rendszeroptimalizalas/`, gyakorlatok feladatsorai
  (Ismétlés: SzA előadások diasorai `www.cs.bme.hu/sza`)

# Gráfok (ismétlés)



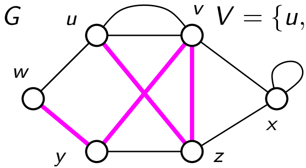

$V = \{u, v, w, x, y, z\}$

$A(G)$:

| | $u$ | $v$ | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $v$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $w$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| $y$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Ez a $G = (V, E)$ (irányítatlan) **gráf** (diagramja). $V(G) = V$ a $G$ **csúcs**ai, $E(G) = E$ pedig $G$ **él**ei halmaza. Pl $u \in V$ ill. $uz \in E$, más szóval $u$ és $z$ **szomszédos**ak $G$-ben. Két **párhuzamos él** fut $u$ és $v$ közt, $x$-re **hurokél** illeszkedik. **Egyszerű** gráfban nincs se párhuzamos, se hurokél. Az $u$, $x$, $y$ csúcsok között nem fut él, ezek **függetlenek**. A **szomszédossági mátrix** $A(G)$.

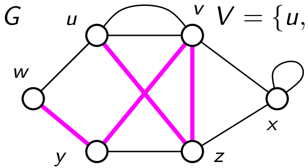
# Gráfok (ismétlés)



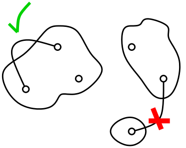

$V = \{u, v, w, x, y, z\}$

Ez a $G = (V, E)$ (irányítatlan) **gráf** (diagramja). $V(G) = V$ a $G$ **csúcs**ai, $E(G) = E$ pedig $G$ **él**ei halmaza. Pl $u \in V$ ill. $uz \in E$, más szóval $u$ és $z$ **szomszédos**ak $G$-ben. Két **párhuzamos él** fut $u$ és $v$ közt, $x$-re **hurokél** illeszkedik. **Egyszerű** gráfban nincs se párhuzamos, se hurokél. Az $u$, $x$, $y$ csúcsok között nem fut él, ezek **függetlenek**. A **szomszédossági mátrix** $A(G)$.
Csúcs **fokszáma** a belőle kiinduló élek száma, pl $d(u) = d(x) = 4$.
$wyvzu$ a $G$ egy $w$-ből $u$-ba vezető $wu$-**út**ja.
A $G$ gráf **összefüggő**, mert bármely két csúcsa között vezet út.

# Gráfok (ismétlés)

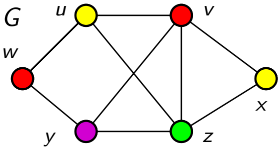



$V = \{u, v, w, x, y, z\}$



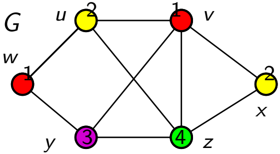
Ez a $G = (V, E)$ (irányítatlan) **gráf** (diagramja). $V(G) = V$ a $G$ **csúcs**ai, $E(G) = E$ pedig $G$ **él**ei halmaza. Pl $u \in V$ ill. $uz \in E$, más szóval $u$ és $z$ **szomszédos**ak $G$-ben. Két **párhuzamos él** fut $u$ és $v$ közt, $x$-re **hurokél** illeszkedik. **Egyszerű** gráfban nincs se párhuzamos, se hurokél. Az $u$, $x$, $y$ csúcsok között nem fut él, ezek **függetlenek**. A **szomszédossági mátrix** $A(G)$.
Csúcs **fokszáma** a belőle kiinduló élek száma, pl $d(u) = d(x) = 4$.
$wyvzu$ a $G$ egy $w$-ből $u$-ba vezető $wu$-**út**ja.
A $G$ gráf **összefüggő**, mert bármely két csúcsa között vezet út.
Minden irányítatlan $G$ gráf egyértelműen felbontható **komponens**ekre, azaz olyan összefüggő gráfokra, amelyek között nem vezet $G$-nek éle. Ha pl $G$ összefüggő, akkor $G$-nek egyetlen komponense van: önmaga.

# Gráfok csúcsainak színezése



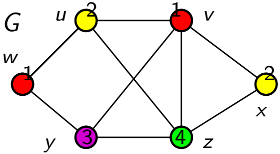

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Megj:** (1) Lehet éppenséggel piros, fehér, zöld, stb színekkel is színezni, de matematikusoknak jobban kézre állnak az $1, 2, 3, 4, \ldots$ színek, mert ezekkel könnyebb dolgozni. Nem kell kétségbe esni: ettől mi még használhatjuk a szokásos színeket.

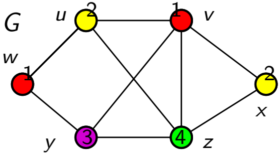
# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

**Megj:**

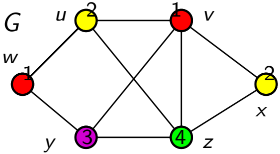
# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

**Megj:** (2) Ha a gráfnak van hurokéle, akkor a csúcsai semmiképp sem színezhetők ki, hisz a hurokél csúcsa színének különböznie kéne önmagától. Ha több párhuzamos élből csak egyet tartunk meg, akkor az nem változtat a gráf kiszínezhetőségén: ugyanazok a lehetséges színezések párhuzamos élekkel, mint nélkülük. Ezért csúcsszínézésekor feltehető, hogy a kiszínezendő gráf egyszerű.

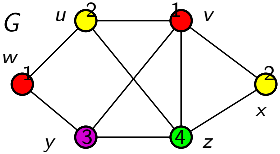
# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

**Megj:**

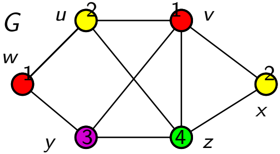
# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

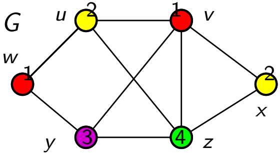
**Megj:** (3) Sok színnel könnyű kiszínezni egy egyszerű gráfot: pl a csúcsokat csupa különbözőre színezhetjük. A kihívás az, ha a lehető legkevesebb színnel akarunk színezni.

# Gráfok csúcsainak színezése



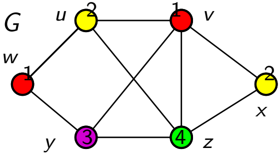

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

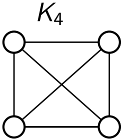
# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

# Gráfok csúcsainak színezése



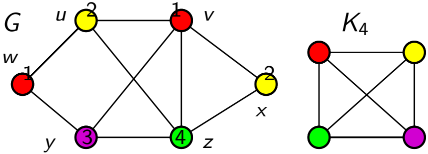




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

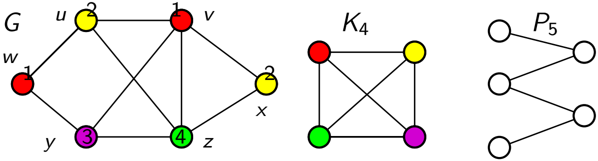
**Példa:** $\chi(K_n) =$

# Gráfok csúcsainak színezése



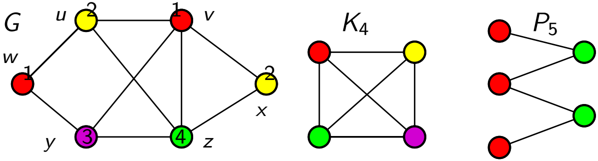

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.

# Gráfok csúcsainak színezése



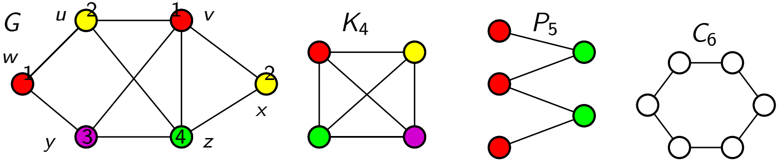

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) =$

# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$

# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

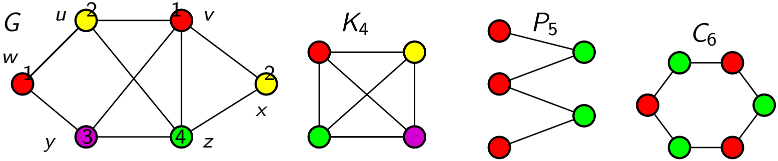
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.

$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$

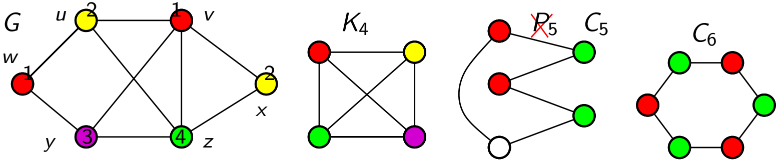
$\chi(C_n) =$

# Gráfok csúcsainak színezése



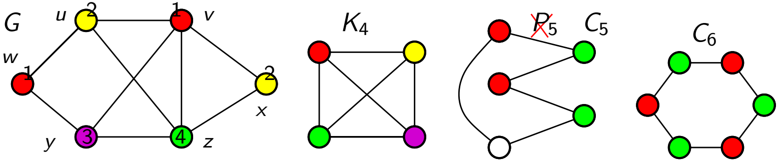

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.

# Gráfok csúcsainak színezése



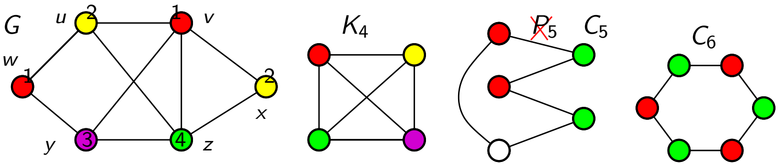

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.
Ha $n$ ptn, akkor két szín nem elég, de 3 igen.

# Gráfok csúcsainak színezése



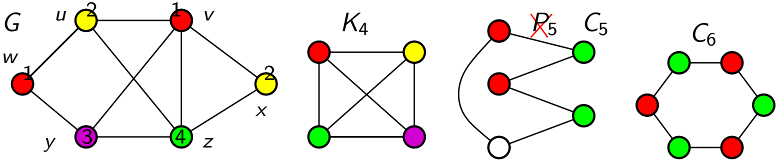

**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.
Ha $n$ ptn, akkor két szín nem elég, de 3 igen.
**Def:** **Színosztály:** kiszínezett gráf azonos színre színezett csúcsai.

# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.
Ha $n$ ptn, akkor két szín nem elég, de 3 igen.
**Def:** **Színosztály:** kiszínezett gráf azonos színre színezett csúcsai.
**Megf:** A színosztály független ponthalmaz. A lehető legkevesebb színnel történő színezés keresésekor $G$ csúcsait minimális számú színosztállyal (ftn ponthalmazzal) szeretnénk lefedni.

# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

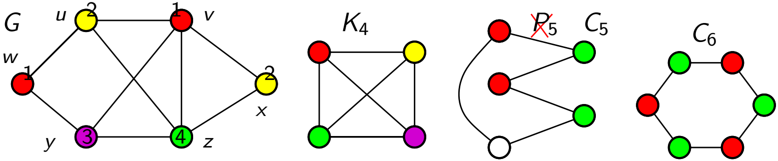
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.
Ha $n$ ptn, akkor két szín nem elég, de 3 igen.

**Def:** **Színosztály:** kiszínezett gráf azonos színre színezett csúcsai.

**Megf:** A színosztály független ponthalmaz. A lehető legkevesebb színnel történő színezés keresésekor $G$ csúcsait minimális számú színosztállyal (ftn ponthalmazzal) szeretnénk lefedni.

**Megj:** A színosztályokat figyeljük, nem a színeken ábrándozunk.

# Gráfok csúcsainak színezése




**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

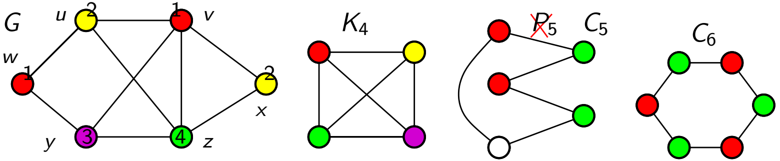
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.
Ha $n$ ptn, akkor két szín nem elég, de 3 igen.

**Def:** **Színosztály:** kiszínezett gráf azonos színre színezett csúcsai.

**Megf:** A színosztály független ponthalmaz. A lehető legkevesebb színnel történő színezés keresésekor $G$ csúcsait minimális számú színosztállyal (ftn ponthalmazzal) szeretnénk lefedni.

# Gráfok csúcsainak színezése

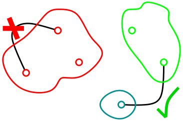



**Def:** A $G$ gráf csúcsainak **kiszínezése** során a csúcsokhoz úgy kell színeket rendelni, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
**Def:** A $G$ gráf **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha $G$ kiszínezhető $k$ színnel, de $(k-1)$-gyel nem.
**Példa:** $\chi(K_n) = n$, semelyik két csúcs nem kaphat azonos színt.
$\chi(P_n) = 2$: két szín kell, és felváltva színezve elég is. $(\chi(P_1) = 1)$
$\chi(C_n) = 2$, ha $n$ páros. Két szín kell, és felváltva színezve elég is.
Ha $n$ ptn, akkor két szín nem elég, de 3 igen.
**Def:** **Színosztály:** kiszínezett gráf azonos színre színezett csúcsai.
**Megf:** A színosztály független ponthalmaz. A lehető legkevesebb színnel történő színezés keresésekor $G$ csúcsait minimális számú színosztállyal (ftn ponthalmazzal) szeretnénk lefedni.
**Cél:** A kromatikus szám minél jobb becslése.

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

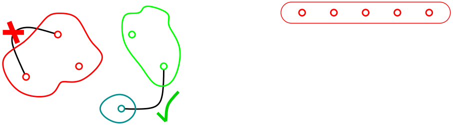
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája



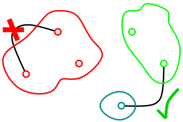
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.

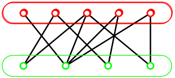
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája



**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
Vagyis az 1-színezhető gráfok az üresgráfok,

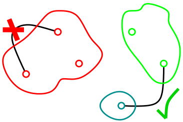
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

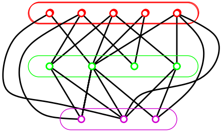




**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
Vagyis az 1-színezhető gráfok az üresgráfok,
a 2-színezhető gráfok élei két színosztály között futnak,

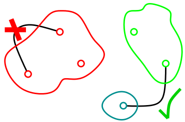
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

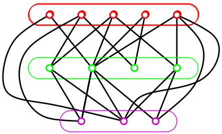




**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
Vagyis az 1-színezhető gráfok az üresgráfok,
a 2-színezhető gráfok élei két színosztály között futnak,
a 3-színezhető gráfoknak három színosztálya van, stb.

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

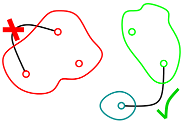


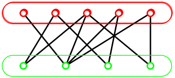


**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?

**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.

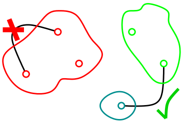
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

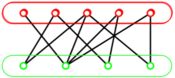




**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.

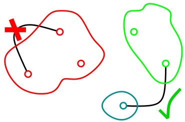
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

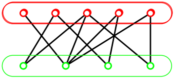




**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.

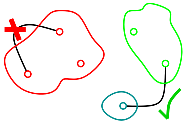
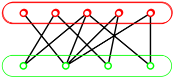
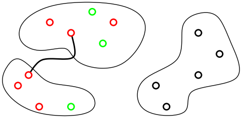
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája





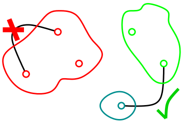
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.

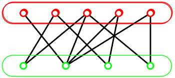
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

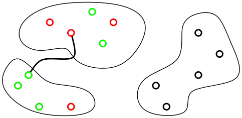




**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Biz:** Építsük fel $G$-t az élek egyenkénti behúzásával!
Ha egy él különböző komponensek azonos színű csúcsait köti össze

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

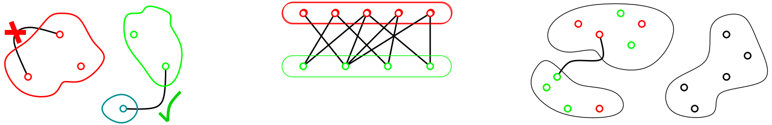






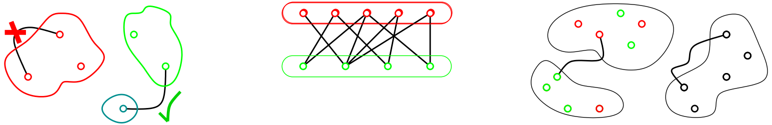
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Biz:** Építsük fel $G$-t az élek egyenkénti behúzásával!
Ha egy él különböző komponensek azonos színű csúcsait köti össze, akkor a csúcsok 2-színezettsége fennmarad az egyik komponens átszínezésével.

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája



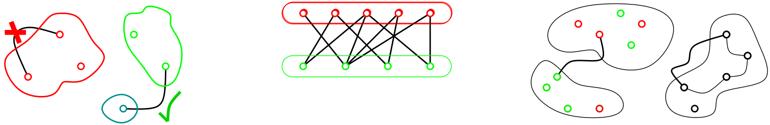
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros. Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Biz:** Építsük fel $G$-t az élek egyenkénti behúzásával!

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája



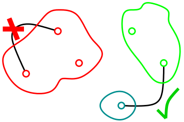
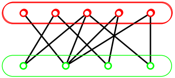
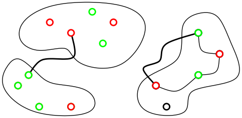
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Biz:** Építsük fel $G$-t az élek egyenkénti behúzásával!
Ha az $uv$ él komponensen belül fut,

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája



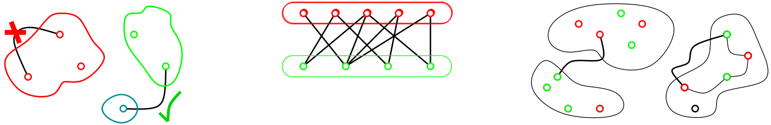
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Biz:** Építsük fel $G$-t az élek egyenkénti behúzásával!
Ha az $uv$ él komponensen belül fut, akkor $uv$-n keresztül van kör, ami páros sok csúcsot tartalmaz.

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

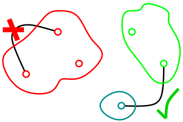
**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Biz:** Építsük fel $G$-t az élek egyenkénti behúzásával!
Ha az $uv$ él komponensen belül fut, akkor $uv$-n keresztül van kör, ami páros sok csúcsot tartalmaz. E körön a csúcsok felváltva vannak színezve, ezért $u$ és $v$ különböző színűek voltak. $\square$

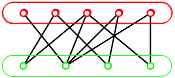
# $k$-kromatikus gráfok struktúrája

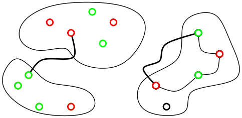


**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.

# $k$-kromatikus gráfok struktúrája







**Kínzó kérdés:** Hogy néz ki egy $k$-színezhető gráf?
**Szemléletes válasz:** A gráf csúcsai $k$ színosztályba sorolhatók, és mindegyik színosztály független ponthalmaz. Vagyis a $k$ színosztály egyikén belül sem fut él, ám különböző színosztályok között korlátlanul futhatnak élek.
**Def:** A $G$ gráf **páros**, ha $G$ 2-színezhető, azaz, ha $\chi(G) \leq 2$.
**Megf:** Ha $G$ páros gráf, akkor $G$ minden részgráfja is páros.
Mivel $\chi(C_{2n+1}) = 3$, ezért páros gráfban nincs páratlan kör.
**Állítás:** Ha $G$-ben nincs páratlan kör, akkor $G$ páros gráf.
**Megj:** Egy $G$ gráf párosságára kétféleképp tekinthetünk. Definíció szerint 2-színezhető gráfról van szó, de gondolhatunk $G$-re páratlan kört nem tartalmazó gráfként is. Utóbbiból rögtön látszik, hogy minden erdő (azaz körmentes gráf) páros.

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli.

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli.
Tehát $\alpha(G) = k$, ha $G$-ben van $k$ ftn pont, de $k+1$ nincs.

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) =$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$,

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) =1$, $\omega(K_n) =$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$,

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) =1$, $\omega(K_n) =n$, $\alpha(P_n) =$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.
**Példa:** $\alpha(K_n) =1$, $\omega(K_n) =n$, $\alpha(P_n) =\lceil \frac{n}{2} \rceil$,

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) =$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.
**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.
**Példa:** $\alpha(K_n)=1$, $\omega(K_n)=n$, $\alpha(P_n)=\lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n)=2$, ha $n>1$, ill. $\omega(P_1)=1$,
$\alpha(C_n)=$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) =$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) =1$, $\omega(K_n) =n$, $\alpha(P_n) =\lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) =2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) =\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) =2$, ha $n > 3$, $\omega(C_3) = \omega(K_3) = 3$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n)=1$, $\omega(K_n)=n$, $\alpha(P_n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil$,
$\omega(P_n)=2$, ha $n>1$, ill. $\omega(P_1)=1$,
$\alpha(C_n)=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, $\omega(C_n)=2$, ha $n>3$, $\omega(C_3)=\omega(K_3)=3$
$\omega(\overline{G})=$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) = 2$, ha $n > 3$, $\omega(C_3) = \omega(K_3) = 3$
$\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$,

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) = 2$, ha $n > 3$, $\omega(C_3) = \omega(K_3) = 3$
$\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$,

**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor (1) $\chi(G) \geq \omega(G)$ ill.
(2) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$.

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.

**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) = 2$, ha $n > 3$, $\omega(C_3) = \omega(K_3) = 3$
$\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$,

**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor (1) $\chi(G) \geq \omega(G)$ ill.
(2) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$.

**Biz:** (1): Ha $\omega(G) = k$, akkor $G$-ben van egy $k$ méretű $K$ klikk. A $G$ tetszőleges kiszínezésekor $K$ csúcsait is kiszínezzük. $K$-ban nincs két azonos színű csúcs, ezért már önmagában $K$ pontjaihoz szükséges $k$ szín. Tehát a kromatikus szám nem lehet $k$-nál kisebb.

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.
**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) = 2$, ha $n > 3$, $\omega(C_3) = \omega(K_3) = 3$
$\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$,
**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor (1) $\chi(G) \geq \omega(G)$ ill.
(2) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$.
**Biz:** (1): Ha $\omega(G) = k$, akkor $G$-ben van egy $k$ méretű $K$ klikk. A $G$ tetszőleges kiszínezésekor $K$ csúcsait is kiszínezzük. $K$-ban nincs két azonos színű csúcs, ezért már önmagában $K$ pontjaihoz szükséges $k$ szín. Tehát a kromatikus szám nem lehet $k$-nál kisebb.
(2): $G$ csúcsai felbonthatók $\chi(G)$ független ponthalmazra. Minden egyes ponthalmazban legfeljebb $\alpha(G)$ csúcs van. Ezért $G$ csúcsainak számára $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ teljesül. $\square$

# A kromatikus szám alsó becslései

**Def:** A $G$ gráf maximális méretű független ponthalmazának méretét $\alpha(G)$ jelöli. **Klikk** a $G$ gráf pként szomszédos pontjai alkotta halmaz. A $G$ gráf maximális klikkjének mérete $\omega(G)$.
**Példa:** $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,
$\omega(P_n) = 2$, ha $n > 1$, ill. $\omega(P_1) = 1$,
$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) = 2$, ha $n > 3$, $\omega(C_3) = \omega(K_3) = 3$
$\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$,
**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor (1) $\chi(G) \geq \omega(G)$ ill.
(2) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$.
**Biz:** (1): Ha $\omega(G) = k$, akkor $G$-ben van egy $k$ méretű $K$ klikk. A $G$ tetszőleges kiszínezésekor $K$ csúcsait is kiszínezzük. $K$-ban nincs két azonos színű csúcs, ezért már önmagában $K$ pontjaihoz szükséges $k$ szín. Tehát a kromatikus szám nem lehet $k$-nál kisebb.
(2): $G$ csúcsai felbonthatók $\chi(G)$ független ponthalmazra. Minden egyes ponthalmazban legfeljebb $\alpha(G)$ csúcs van. Ezért $G$ csúcsainak számára $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ teljesül. $\square$
**Megj:** A fenti becslések nagyon távol lehetnek az igazságtól.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel

**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

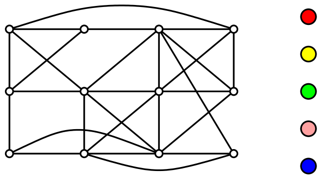
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel

**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
**Megj:** (1) $\Delta(G)$ a $G$ gráf maximális fokszámát jelöli.
(2)A tétel igazolásához azt kell megmutatni, hogy $\Delta(G) + 1$ szín minden esetben elegendő $G$ csúcsainak kiszínezéséhez. Ha ezt igazoltuk, akkor rögtön adódik, hogy a $G$ kiszínezéséhez szükséges minimális számú szín ennél nem lehet több.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel

**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

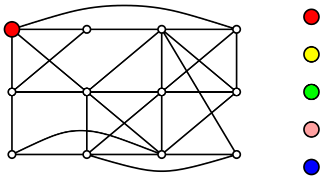
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

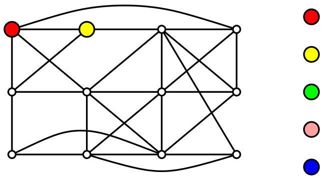
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

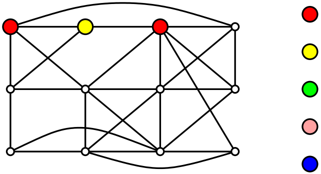
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

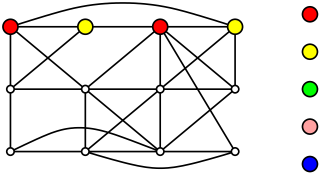
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

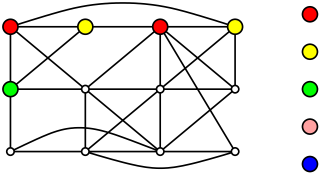
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

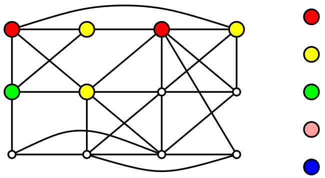
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

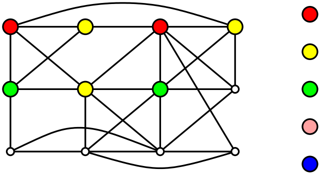
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

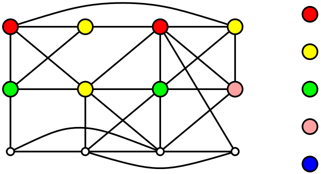
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

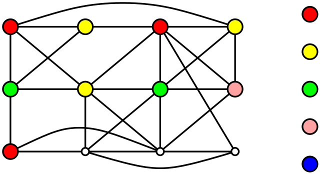
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

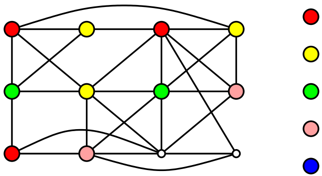
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

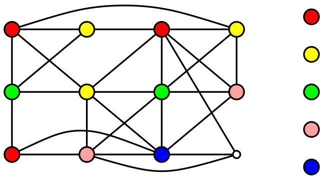
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

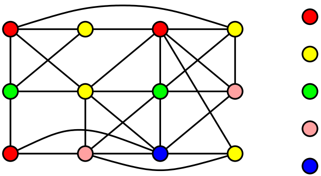
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

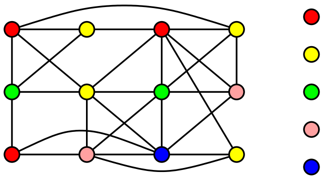
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.

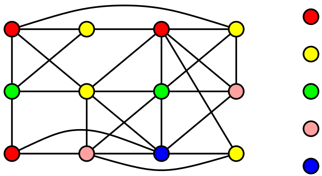
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \ldots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.
A $v_i$ csúcsnak $d(v_i)$ szomszédja van, ezért legfeljebb ennyi szín van kizárva a $v_i$ színének kiválasztásakor. Ezért $v_i$ színét biztosan az $1, 2, \ldots, d(v_i) + 1$ színek közül választjuk.

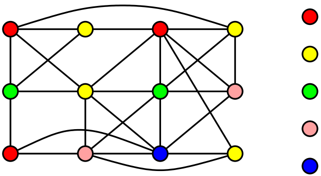
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

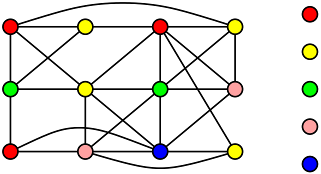
**Biz:** Megadjuk $G$ egy konkrét kiszínezését, és bebizonyítjuk, hogy ehhez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színre volt szükség. Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_n$ a $G$ csúcsai, és $1, 2, \dots$ a rendelkezésre álló színek. Színezzük $G$ csúcsait $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendben. A soron következő $v_i$ színe legyen mindig a legkisebb olyan szín, amit nem használtunk még fel $v_i$ egyetlen korábban kiszínezett szomszédjához sem.
A $v_i$ csúcsnak $d(v_i)$ szomszédja van, ezért legfeljebb ennyi szín van kizárva a $v_i$ színének kiválasztásakor. Ezért $v_i$ színét biztosan az $1, 2, \dots, d(v_i) + 1$ színek közül választjuk.
Így sosem használtunk $(\Delta(G) + 1)$-nél nagyobb sorszámú színt, ezért a fenti mohó színezéshez biztosan elég $(\Delta(G) + 1)$ szín. $\square$

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

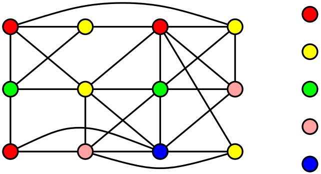
# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) A Tétel felső becslése igen távol állhat az igazságtól. Megadható alkalmas $2n$ csúcsú $G$ páros gráfon olyan csúcssorrend, amire a mohó színezés $n$ színt használ a szükséges 2 helyett.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel

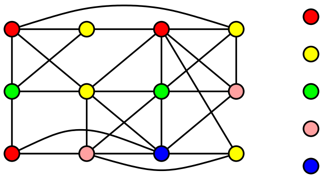


**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) A Tétel felső becslése igen távol állhat az igazságtól. Megadható alkalmas $2n$ csúcsú $G$ páros gráfon olyan csúcssorrend, amire a mohó színezés $n$ színt használ a szükséges 2 helyett.

(2) Jó hír, hogy bármely $G$ gráfhoz van olyan csúcssorrend, amire a mohó algoritmus csupán $\chi(G)$ színt használ.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



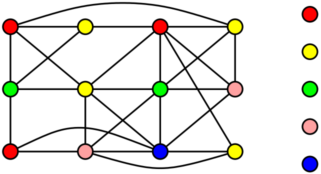
**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) A Tétel felső becslése igen távol állhat az igazságtól. Megadható alkalmas $2n$ csúcsú $G$ páros gráfon olyan csúcssorrend, amire a mohó színezés $n$ színt használ a szükséges 2 helyett.

(2) Jó hír, hogy bármely $G$ gráfhoz van olyan csúcssorrend, amire a mohó algoritmus csupán $\chi(G)$ színt használ.

(3) A kromatikus szám meghatározása általában reménytelen. Már arra sem várható hatékony algoritmus, hogy egy inputgráf 3-színezhetőségét eldöntsük.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

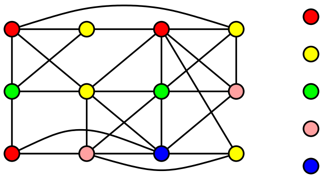
**Megj:** (1) A Tétel felső becslése igen távol állhat az igazságtól. Megadható alkalmas $2n$ csúcsú $G$ páros gráfon olyan csúcssorrend, amire a mohó színezés $n$ színt használ a szükséges 2 helyett.

(2) Jó hír, hogy bármely $G$ gráfhoz van olyan csúcssorrend, amire a mohó algoritmus csupán $\chi(G)$ színt használ.

(3) A kromatikus szám meghatározása általában reménytelen. Már arra sem várható hatékony algoritmus, hogy egy inputgráf 3-színezhetőségét eldöntsük.

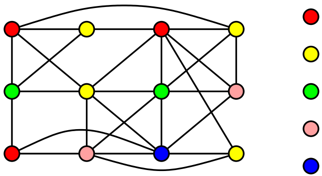
(4) Ha $G$ teljes gráf vagy páratlan kör, akkor $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
**Megj:** (1) A Tétel felső becslése igen távol állhat az igazságtól. Megadható alkalmas $2n$ csúcsú $G$ páros gráfon olyan csúcssorrend, amire a mohó színezés $n$ színt használ a szükséges 2 helyett.
(2) Jó hír, hogy bármely $G$ gráfhoz van olyan csúcssorrend, amire a mohó algoritmus csupán $\chi(G)$ színt használ.
(3) A kromatikus szám meghatározása általában reménytelen. Már arra sem várható hatékony algoritmus, hogy egy inputgráf 3-színezhetőségét eldöntsük.
(4) Ha $G$ teljes gráf vagy páratlan kör, akkor $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.
**Brooks tétele:** Ha $G$ összefüggő egyszerű gráf, és $G$ nem teljes gráf és nem ptn kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

# A kromatikus szám felső becslése mohó színezéssel



**Tétel:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) A Tétel felső becslése igen távol állhat az igazságtól. Megadható alkalmas $2n$ csúcsú $G$ páros gráfon olyan csúcssorrend, amire a mohó színezés $n$ színt használ a szükséges 2 helyett.

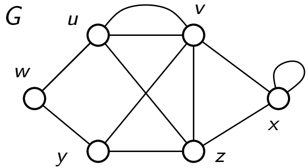
(2) Jó hír, hogy bármely $G$ gráfhoz van olyan csúcssorrend, amire a mohó algoritmus csupán $\chi(G)$ színt használ.

(3) A kromatikus szám meghatározása általában reménytelen. Már arra sem várható hatékony algoritmus, hogy egy inputgráf 3-színezhetőségét eldöntsük.

(4) Ha $G$ teljes gráf vagy páratlan kör, akkor $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

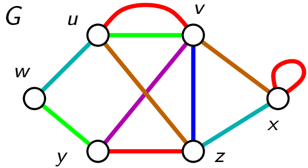
**Brooks tétele:** Ha $G$ összefüggő egyszerű gráf, és $G$ nem teljes gráf és nem ptn kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$. **Biz:** Váratlanul nehéz.

# Élszínezések



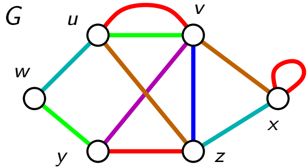

**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

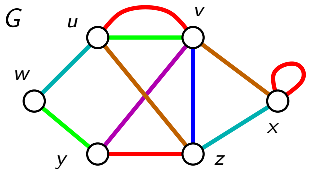
# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Megj:** (1) Az élszínezési feladat multigráfokra is érdekes. Élszínezés keresésekor bármely hurokél helyettesíthető levéllel, ezért feltehető, hogy a színezendő gráfnak nincs hurokéle.

# Élszínezések

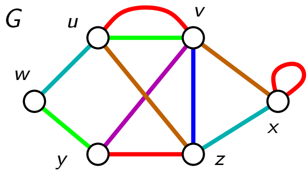



**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Megj:** (1) Az élszínezési feladat multigráfokra is érdekes. Élszínezés keresésekor bármely hurokél helyettesíthető levéllel, ezért feltehető, hogy a színezendő gráfnak nincs hurokéle.

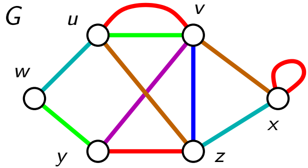
(2) Élszínezés esetén is a színosztályokat (vagyis az azonos színű élek halmazát) érdemes figyelni. Néhány él akkor lehet egyszínű, ha nincs közös csúcsuk, más szóval ha **párosítást** alkotnak. Az élkromatikus szám meghatározásához $G$ éleit a legkevesebb számú párosítással szeretnénk lefedni.

# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

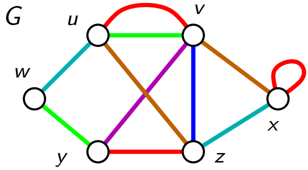
# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

# Élszínezések

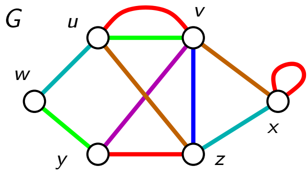



**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

**Biz:** Ha $d(v) = \Delta(G)$, akkor a $v$-ből induló élek csupa különböző színt kapnak. Így már ezen élek színezéséhez $\Delta(G)$ szín kell, ezért $G$ éleinek színezése nem úszható meg $\Delta(G)$-nél kevesebb színből. $\square$

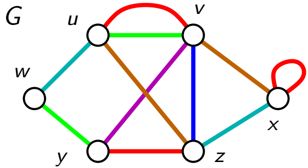
# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

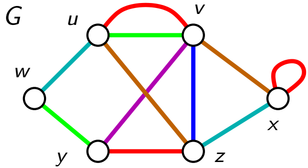
**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

# Élszínezések



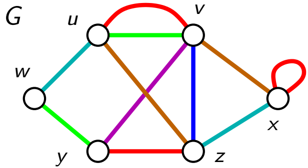

**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.
**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.
**Megj:** A fenti állítás nem áll messze az igazságtól.
**Vizing tétele:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.
**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.
**Megj:** A fenti állítás nem áll messze az igazságtól.
**Vizing tétele:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
**Köv:** $G$ egyszerű gráf $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

# Élszínezések




**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

**Megj:** A fenti állítás nem áll messze az igazságtól.

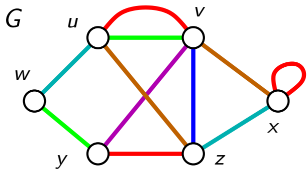
**Vizing tétele:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

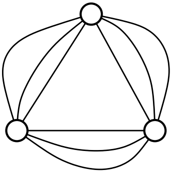
**Köv:** $G$ egyszerű gráf $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) NP-nehéz eldönteni, hogy $\chi' = \Delta$ teljesül-e.

(2) Vizing tétele nem igaz multigráfokra.

# Élszínezések



**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

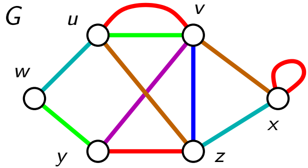
**Megj:** A fenti állítás nem áll messze az igazságtól.

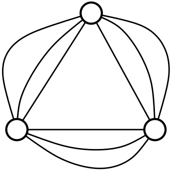
**Vizing tétele:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Köv:** $G$ egyszerű gráf $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) NP-nehéz eldönteni, hogy $\chi' = \Delta$ teljesül-e.
(2) Vizing tétele nem igaz multigráfokra.

# Élszínezések



**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

**Megj:** A fenti állítás nem áll messze az igazságtól.

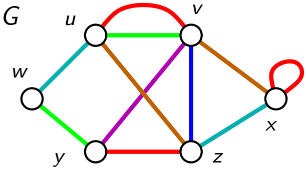
**Vizing tétele:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

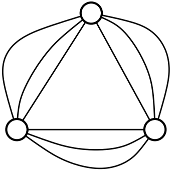
**Köv:** $G$ egyszerű gráf $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) NP-nehéz eldönteni, hogy $\chi' = \Delta$ teljesül-e.
(2) Vizing tétele nem igaz multigráfokra.

**Shannon tétele:** Ha $G$ véges gráf, akkor $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

# Élszínezések



**Def:** A $G$ gráf éleinek **kiszínezése** során $G$ éleihez úgy kell színeket rendelni, hogy közös csúcsot használó élek színe különböző legyen. A $G$ éleinek kiszínezéséhez szükséges minimális színszám a $G$ **élkromatikus száma**, jele $\chi'(G)$.

**Állítás:** Bármely hurokélmentes $G$ gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ teljesül.

**Megj:** A fenti állítás nem áll messze az igazságtól.

**Vizing tétele:** Ha $G$ egyszerű gráf, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Köv:** $G$ egyszerű gráf $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

**Megj:** (1) NP-nehéz eldönteni, hogy $\chi' = \Delta$ teljesül-e.
(2) Vizing tétele nem igaz multigráfokra.

**Shannon tétele:** Ha $G$ véges gráf, akkor $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

**Vizing erősebb tétele:** $G$ véges gráf $\Rightarrow \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$, ahol $\mu(G)$ a legnagyobb élmultiplicitás $G$-ben.

# Páros gráfok élszínezései

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

# Páros gráfok élszínezései

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.
**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.

# Páros gráfok élszínezései

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.

**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő.

# Páros gráfok élszínezései

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.

**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓

# Páros gráfok élszínezései

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.

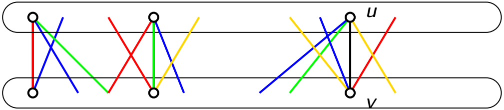
**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓

**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük.

# Páros gráfok élszínezései

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.
**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.
**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓
**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük.

# Páros gráfok élszínezései



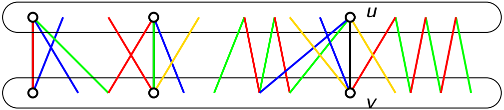

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.

**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓

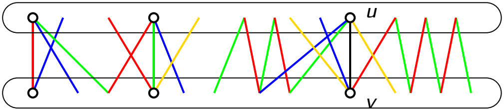
**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük. Ha $u$-nál a piros, $v$-nél pedig a zöld szín szabad, akkor a piros és zöld élek piros-zöld alternáló utakat és köröket alkotnak.

# Páros gráfok élszínezései



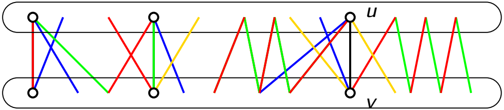

**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.
**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.
**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓
**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük. Ha $u$-nál a piros, $v$-nél pedig a zöld szín szabad, akkor a piros és zöld élek piros-zöld alternáló utakat és köröket alkotnak.

# Páros gráfok élszínezései




**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.
**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.
**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓
**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük. Ha $u$-nál a piros, $v$-nél pedig a zöld szín szabad, akkor a piros és zöld élek piros-zöld alternáló utakat és köröket alkotnak.
Az $u$-ból induló $P_u$ út zölden indul, és $v$ színosztályába mindig zöld élen érkezik. Így $P_u$ különbözik a $v$-ből piros élen induló $P_v$-től.

# Páros gráfok élszínezései




**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

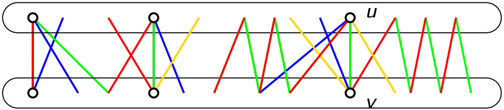
**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.

**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓

**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük. Ha $u$-nál a piros, $v$-nél pedig a zöld szín szabad, akkor a piros és zöld élek piros-zöld alternáló utakat és köröket alkotnak.

Az $u$-ból induló $P_u$ út zölden indul, és $v$ színosztályába mindig zöld élen érkezik. Így $P_u$ különbözik a $v$-ből piros élen induló $P_v$-től. Ezért $P_u$ éleit átszínezve olyan színezést kapunk, ami mellett $e$-t zöldre színezhetjük. □

# Páros gráfok élszínezései




**Kőnig tétele:** Ha $G$ páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.
**Biz:** Algoritmussal bizonyítunk: $G$ éleit egyenként húzzuk be. Minden él behúzása után az addigi maximális fokszámnyi színnel színezünk. Tfh néhány él behúzása után ilyen színezésünk van, és egy $e = uv$ élt húzunk be.
**I. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám megnő. $e$ új színt kap. ✓
**II. eset** $e$ behúzásával a maxfokszám nem nő. Ekkor $u$-nál és $v$-nél is van szabad szín. Ha ezek egyformák, akkor $e$-t ezzel színezzük. Ha $u$-nál a piros, $v$-nél pedig a zöld szín szabad, akkor a piros és zöld élek piros-zöld alternáló utakat és köröket alkotnak.
Az $u$-ból induló $P_u$ út zölden indul, és $v$ színosztályába mindig zöld élen érkezik. Így $P_u$ különbözik a $v$-ből piros élen induló $P_v$-től. Ezért $P_u$ éleit átszínezve olyan színezést kapunk, ami mellett $e$-t zöldre színezhetjük. $\square$

# Mit tanultunk ma?

# Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám

# Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám
- Független ponthalmaz, klikkméret

# Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám
- Független ponthalmaz, klikkméret
- Alsó korlát $\chi$-re

# Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám
- Független ponthalmaz, klikkméret
- Alsó korlát $\chi$-re
- Mohó színezés, felső korlát

# Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám
- Független ponthalmaz, klikkméret
- Alsó korlát $\chi$-re
- Mohó színezés, felső korlát
- Élszínezés, alsó és felső korlát a maxfokszámmal

# Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám
- Független ponthalmaz, klikkméret
- Alsó korlát $\chi$-re
- Mohó színezés, felső korlát
- Élszínezés, alsó és felső korlát a maxfokszámmal
- Páros gráfok élszínezése

## Mit tanultunk ma?

- Gráfszínezés, kromatikus szám
- Független ponthalmaz, klikkméret
- Alsó korlát $\chi$-re
- Mohó színezés, felső korlát
- Élszínezés, alsó és felső korlát a maxfokszámmal
- Páros gráfok élszínezése

**Vége!**