Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2024. április 29.

1. Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ és tegyük fel, hogy minden $1 \le i, j \le 5$ esetén a_i szomszédos b_j-vel a $G = (A, B; E)$ páros gráfban. Továbbá legyen az $\{a_i, b_j\}$ él súlya a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló szám minden $1 \le i, j \le 5$ esetén.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	1	1	4	3	p	5	0	5	1	$4-p$

a) A p valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy a fenti, jobbra látható táblázatban megadott $c(v)$ értékek G egy címkézését határozzák meg?

b) Mennyi G egy minimális összegű címkézésében a címkék összege? (Más szóval: ha képzeletben meghatározzuk G összes címkézését – nem csak azokat, amik a fenti táblázatban láthatók – és mindre összeadjuk az összes csúcs címkéjét, akkor mi az így kapott számok minimuma?)

2. a) Írjuk fel az alábbi, balra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha a válasz igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét.

$$\begin{aligned} &\max\{x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 7x_5\} \\ &\text{ha} \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &\le 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 &\le 8 \\ x_4 + 4x_5 &\le 7 \\ x_4 + 5x_5 &\le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 &\ge 0, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & p \\ 1 & -1 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}$$

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy a fenti, jobbra látható A mátrix totálisan unimoduláris-e.

4. Egy probléma bemenete a k pozitív egész szám. Döntsük el, hogy a problémára adott alábbi lépésszámú algoritmusok polinomiálisak-e.

a) k^2

b) $(\log k)^{\log k}$

c) $\log(k^{\log k})$

d) $(\log k)^{\log \log k}$

5. Tekintsük a maximális páros részgráf keresésére tanult második approximációs algoritmust (ahol a csúcsokat egyesével, egymás után helyezzük el). Döntsük el, hogy előfordulhat-e, hogy az algoritmus kimeneteként kapott páros részgráf mérete pontosan az optimum fele, ha a bemeneti gráf egy

a) 12 csúcsú fa;

b) 13 csúcsú fa.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A megoldásokat indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2024. április 29.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. a) A tanult definíció szerint c pontosan akkor címkézés, ha minden $e = \{a_i, b_j\}$ élre $c(a_i) + c(b_j) \geq w(e)$ teljesül. (0 pont)
Ez a feltétel $1 \leq i, j \leq 4$ (vagyis a mátrix bal felső 4×4-es részmátrixának megfelelő 16 élre) valóban teljesül is, ez gyorsan ellenőrizhető. (1 pont)
A gráf további 9 élére pedig sorban (az a_5-re illeszkedő élekkel kezdve, majd a maradék b_5-re illeszkedőkkel folytatva) a $p + 5 \geq 6$, $p + 0 \geq 1$, $p + 5 \geq 5$, $p + 1 \geq 2$, $p + (4 - p) \geq 4$, $1 + (4 - p) \geq 2$, $1 + (4 - p) \geq 1$, $4 + (4 - p) \geq 5$ és $3 + (4 - p) \geq 3$ feltételeket kapjuk. (2 pont)
Ezekből sorban a $p \geq 1$, $p \geq 1$, $p \geq 0$, $p \geq 1$, $p \leq 3$, $p \leq 4$, $p \leq 3$ és $p \leq 4$ korlátok adódnak (és $p + (4 - p) \geq 4$ semmitmondó). (1 pont)
Így c pontosan akkor alkot címkézést, ha $1 \leq p \leq 3$. (2 pont)

b) A megadott c címkézésben a címkék összege 24 (minden $1 \leq p \leq 3$ esetén), (0 pont)
így a keresett minimum legföljebb 24. (1 pont)
G-ben teljes párosítást alkotnak az $\{a_1, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_1\}$, $\{a_4, b_4\}$ és $\{a_5, b_5\}$ élek, ennek az összsúlya $1 + 6 + 9 + 4 + 4 = 24$. (1 pont)
A tanultak szerint G-ben bármely teljes párosítás összsúlya legföljebb annyi, mint tetszőleges címkézésben a címkék összege. (1 pont)
Következik, hogy G minden címkézésében a címkék összege legalább 24. (2 pont)
Ezért a keresett minimum értéke pontosan 24. (1 pont)
Megjegyzés. Bár ennek a dokumentálása (a fentiek szerint) nem feltétlen része egy teljes értékű megoldásnak, de a b) kérdés megválaszolásához szükséges 24 összsúlyú teljes párosítás megtalálását segítheti, hogy abban a tanultak szerint csak szoros élek lehetnek – vagyis olyanok, amikre $c(a_i) + c(b_j) = w(e)$ teljesül.

A 2. feladat megoldása. a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{(1 pont)}$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{array}{l} \min\{7y_1 + 8y_2 + 7y_3 + 8y_4\} \\ \text{ha} \\ y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ -y_1 - 3y_2 \geq -1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 4 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{array}$$

(5 pont)

A duális felírásáért járó 5 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 4 pont levonást jelentsen.

A primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró öt egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 9 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 9 változós lineáris program – ami azonban a tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal. Lényeges elvi hibának számít viszont az (és így a fentebb írt 4 pont levonás vonatkozik rá), ha valaki a duálisnak nem a megfelelő alakját használja a primál általa választott mátrixos alakjához.

b) A duális feladat első és harmadik egyenlőtlenségéből együtt az $y_1 + 3y_2 = 1$ egyenlet következik. Ebből $y_1 = 1 - 3y_2$, amit a második egyenlőtlenségbe helyettesítve $y_2 \leq -1$ adódik. (Ugyanerre juthatunk egyszerűbben is a duális második és harmadik egyenlőtlenségét összeadva.) (1 pont)
Ez ellentmond a duális $y_2 \geq 0$ feltételének, így a duális rendszere nem megoldható. (2 pont)
Mivel a primál feladat rendszere megoldható, hiszen például $x_1 = \ldots = x_5 = 0$ megoldása, (0 pont)
ezért a duális rendszerének megoldhatatlanságából a tanultak szerint (pontosabban: akár a „3-kalitkás tétel”, akár a dualitástétel miatt) adódik, hogy a primál feladat célfüggvénye nem felülről korlátos a megoldáshalmazán. (3 pont)

A 3. feladat megoldása. A definícióból közvetlenül következően (illetve az előadáson elhangzottak szerint) egy totálisan unimoduláris mátrix minden eleme 1, -1 vagy 0. Így csak a $p = 1$, $p = -1$ és $p = 0$ értékeket kell megvizsgálnunk, minden más esetben A biztosan nem TU. (2 pont)
Ha $p = 1$, akkor A jobb alsó 2×2-es részmátrixának a determinánsa $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, így A nem TU (mert van 1-től, -1-től és 0-tól különböző determinánsú négyzetes részmátrixa). (2 pont)
Ha $p = -1$, akkor az A négy sarka által alkotott 2×2-es részmátrixának a determinánsa $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, így A megint nem TU. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy a $p = 0$ esetben viszont A totálisan unimoduláris. (0 pont)
A-nak a bal felső, 3×3-as négyzetes részmátrixát jelölje A_0. Ekkor A_0 egy irányított gráf illeszkedési mátrixa: valóban, ha a három sornak sorban az u, v, w csúcsok felelnek meg és a gráfban az (u, w), (w, v) és (v, u) élek szerepelnek (vagyis a gráf egy körbeirányított háromszög), akkor az élek ebben a sorrendben A_0 három oszlopát hozzák létre az illeszkedési mátrix definíciója szerint. (1 pont)
A tanult tétel szerint minden irányított gráf illeszkedési mátrixa TU, így A_0 is az. (1 pont)
Adjunk hozzá A_0-hoz egy új, negyedik oszlopot, aminek az utolsó eleme 1, a fölötte álló két eleme 0. A tanult lemma szerint a kapott mátrix is TU. Most ezt az új oszlopot szorozzuk meg (-1)-gyel. Ez ismét a tanult lemma szerint megint nem rontja el a TU tulajdonságot. (1 pont)
A kapott 3×4-es mátrixhoz vegyük hozzá egy új, negyedik sorként a harmadik sorának egy kópiáját; majd ezt a sort szorozzuk meg (-1)-gyel. Ez a két művelet a szintén megőrzi a TU-ságot a tanult lemma szerint. (1 pont)
Az így kapott 4×4-es mátrixhoz végül vegyünk hozzá egy új, ötödik oszlopot, aminek az első eleme 1, a többi 0. A már alkalmazott tulajdonság szerint továbbra is TU mátrixot kapunk. (1 pont)
Mivel ezzel éppen A-t kaptuk meg a $p = 0$ esetben, ezért ennek a TU-ságát valóban beláttuk.(1 pont)
Így A a $p = 0$ esetben totálisan unimoduláris, a p összes többi értékére viszont nem az. (0 pont)

A 4. feladat megoldása. A bemenet mérete $n := \lfloor \log k \rfloor + 1$, de nyugodtan számolhatunk $n = \log k$-val, ez a polinomialitást nem befolyásolja. (1 pont)

a) $k^2 = 2^{2n}$, így ez a lépésszám nem polinomiális. (1+1 pont)
b) $(\log k)^{\log k} = n^n$, így ez a lépésszám sem polinomiális. (1+1 pont)
c) A logaritmusfüggvény ismert azonossága szerint $\log(k^{\log k}) = \log k \cdot \log k = n^2$, így ez a lépésszám polinomiális. (1+1+1 pont)
d) $(\log k)^{\log \log k} = n^{\log n}$, (1 pont)
így ez a lépésszám nem polinomiális, (1 pont)
mert $\log n$ végtelenhez tart, ha n végtelenhez tart, (1 pont)
így nem léteznek olyan c_1, c_2 konstansok, melyekre $n^{\log n} \leq c_1 n^{c_2}$ minden n-re teljesül. (1 pont)

Az 5. feladat megoldása. A fák páros gráfok, (2 pont)
így a kérdéses optimum a fa élszáma, vagyis az a) feladatban 11, a b) feladatban 12. (2 pont)
Az a) esetben így az optimum felét nem adhatja az algoritmus, hiszen az nem egész szám. (1 pont)
A b) esetben előfordulhat, hogy az algoritmus 6 élű páros részgráfot talál. (0 pont)
Legyen F (például) egy 13 csúcsú csillag. (2 pont)
Ha a 12 fokú csúcsot utolsónak helyezzük el, akkor a korábbiak helyéről tetszésünk szerint dönthetünk, hiszen semelyik kettő sincs összekötve, (2 pont)
így előfordulhat, hogy 6 csúcsot teszünk A-be és B-be is. (2 pont)
Az utolsó csúcs helyétől függetlenül ekkor csakugyan 6 él megy a két osztály között. (1 pont)