Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2017. április 11.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét. (A megoldásban felhasználhatjuk, hogy a (primál) feladat rendszere megoldható, ezt bizonyítani tehát nem kell.)

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 + x_3\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 - x_4 + x_6 \geq 3\\
&-x_1 - x_2 - x_3 \geq 6\\
&x_2 + x_5 - x_6 \leq 1\\
&x_3 + x_4 - x_5 \leq 2
\end{aligned}$$

2. A $G(A,B;E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alábbi, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$ esetén).

a) Az x paraméter mely értékeire igaz, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés?

b) Adjunk meg egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk is meg, hogy maximális)!

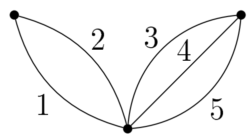
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 5 & 6 & 6\\ 6 & 7 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

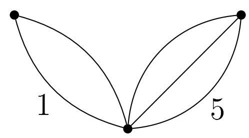
v :	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$:	2	3	4	4	6	0	1	1	2	x

3. A jobbra látható mátrixban a $*$ helyen álló szám elmosódott, csak azt lehet tudni, hogy negatív. Megállapítható-e így, hogy grafikus-e az a matroid, amelyet a mátrix a valós test felett meghatároz?

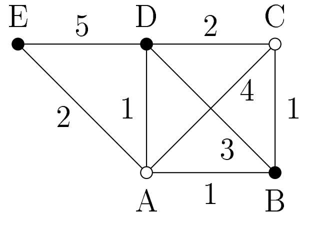
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3\\ 5 & 0 & -1 & 2\\ * & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi két gráf által meghatározott matroidok összegéről kellene megállapítani, hogy grafikus-e. Lehetséges-e ez, ha a második néhány éléről „lemaradt” a számozás? (Ha az összegmatroidról azt állítja, hogy grafikus, adja is meg gráffal!)





5. Futtassuk le és dokumentáljuk a Steiner-fa probléma alább látható esetére az előadáson tanult közelítő algoritmust. A terminálok halmaza $T = \{B, D, E\}$.



6. Adjunk 2-approximációs algoritmust tetszőleges gráfok élszínezésére és mutassuk be a futását azon a gráfon, melyet egy 5 hosszú körből az élek megduplázásával kapunk.

A zárthelyi feladatok megoldásai

Az 1. feladat megoldása. a) Ha a rendszert $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakra hozzuk, akkor az alábbi táblázat szemlélteti A-t bal felül, b-t jobboldalt és c-t alul:

$$\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Ekkor a duális $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakú, azaz:

$$\begin{aligned} \min\{-3y_1 - 6y_2 + y_3 + 2y_4\} \\ -y_1 + y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ y_2 + y_4 = 1 \\ y_1 + y_4 = 0 \\ y_3 - y_4 = 0 \\ -y_1 - y_3 = 0 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{aligned}$$

b) I. megoldás. Vizsgáljuk meg a duális feladatot. A nemnegativitási feltétel a negyedik egyenlettel azt adja, hogy $y_1 = y_4 = 0$ kell legyen. Ekkor az 5. egyenletből következik, hogy $y_3 = 0$ a hatodikból pedig, hogy $y_1 = 0$. Így az első egyenlet szerint $y_2 = 1$ kell legyen, és ezzel a választással a második és harmadik egyenlet is teljesül. Azaz a duálisnak létezik megoldása, és ez a megoldás a feltételek miatt egyértelmű. Így a duális feladat összes megoldásának értéke -6, tehát a minimum is ennyi.
Mivel a duálisnak létezik megoldása így a tanult tétel szerint a primál korlátos. A dualitástétel értelmében mivel a primálnak és a duálnak is létezik megoldása, így a két feladat optimális értéke megegyezik. Ez a duálnál -6, így a primál maximum értéke -6 lesz.

II. megoldás. A primál második egyenlőtlensége szerint a maximalizálandó célüggvény értéke nem lehet nagyobb mint -6, azaz a célfüggvény felülről korlátos a megoldáshalmazon.
Például a $(-6, 0, 0, -9, 0, 0)$ választással olyan megoldását kapjuk (mert minden egyenlőtlenséget kielégít) a primál feladatnak, aminek célfüggvény értéke -6 $(= -6+0+0)$. Tehát találtunk egy olyan megoldást, aminél jobbat nem lehet elérni, így a feladat maximum értéke -6.

A 2. feladat megoldása. a) Akkor mondhatjuk, hogy c címkézés, ha minden élre igaz, hogy $w_{ij} \le c(v_i) + c(v_j)$.. Ez a mátrix első 4 oszlopára teljesül is, míg az utolsóra öt egyenlőtlenséget kapunk x-re. Ezek alapján $x \ge 3, x \ge 3, x \ge 2, x \ge 2, x \ge 3$, azaz pontosan akkor teljesül egyszerre az összes, ha $x \ge 3$. Tehát c pontosan akkor címkézés, ha $x \ge 3$.

b) A tanultak alapján minden címkézés összértéke felső korlátot ad a maximális összsúlyú teljes párosítás értékére. Így az a)-ból tudhatjuk, hogy $23 + x$ felső korlát minden $x \ge 3$-ra, azaz $x = 3$-ra is. Így tudjuk, hogy nincs 26-nál nagyobb összsúlyú teljes párosítás.
A $(a_1, b_5), (a_2, b_4), (a_3, b_3), (a_4, b_2), (a_5, b_1)$ egy teljes párosítás (hiszen minden pont pontosan egyszer szerepel rajta), aminek az összsúlya $5 + 5 + 5 + 5 + 6 = 26$. Tehát találtunk egy olyan párosítást, aminek az összúlyánál nagyobbat nem lehet elérni, így ez egy maximális összsúlyú teljes párosítás. (Ennek megtalálásához használható (nem kötelező) az Egerváry algoritmus, de annak csak egy apró részlete kell, hiszen az $x = 3$-as címkézés alapján meghatározható piros részgráfban már van is teljes párosítás, így egyszer sem kell módosítani a címkézésen.)

A 3. feladat megoldása. A mátrixnak 4 oszlopa van, tehát a matroid alaphalmaza 4 elemű. Az ekkora halmazon a 2 rangú uniform matroid az egyetlen nem grafikus. Így a mátrix által meghatározott matroid akkor és csak akkor nem grafikus, ha a mátrix bármelyik két oszlopa még lineárisan független, de bármelyik három oszlopa már lineárisan összefüggő. Az előbbi biztos teljesül (már a mátrix első két sora által meghatározott 2 magas oszlopvektorokról is látszik, hogy páronként függetlenek). Ahhoz, hogy az utóbbi is teljesüljön, kell, hogy a mátrix rangja 2 legyen, tehát a harmadik sornak elő kell állnia az első kettő lineáris kombinációjaként. A $(2,0,3)$ és a $(0,-1,2)$ sorokból csak úgy lehet előállítani a $(-2,-2,1)$ sort, ha az elsőt kivonjuk a második kétszereséből. Ezt a lineáris kombinációt az eredeti hoszú sorokra végrehajtva a $*$ helyére 9 (tehát egy pozitív szám) kerülne. Tehát pusztán abból, hogy a $*$ helyen negatív szám van, következik, hogy a matroid grafikus.

A 4. feladat megoldása. Ha a jobboldali matroidban az 1-gyel párhuzamos él a 2, akkor az összegben 3, 4, 5 lesz az egyetlen kör. Ez grafikus matroid (egy háromszög és róla „lelóg" az 1 és 2 él). Ha az 1-gyel párhuzamos él a 3, akkor az összegben minden 4 elemű részhalmaz független lesz (ki kell próbálni mind az öt lehetséges esetet, pl. az $\{1,2,3,4\}$ halmaz előáll $\{1,4\}$ és $\{2,3\}$ uniójaként). A teljes 5 elemű halmaz persze összefüggő lesz, tehát az összeg grafikus (egyetlen 5 hosszú kör). Ha az 1-gyel párhuzamos él a 4, az ugyanúgy tárgyalható, mint az előző eset (csak 3 és 4 szerepét kell felcserélni). Tehát az összegmatroid minden esetben grafikus lesz.

Az 5. feladat megoldása. A megadott Steiner-fa probléma nem metrikus (már csak azért sem, mert a gráf nem teljes, de egyébként sem teljesül a metrikusság feltétele, pl. a BD él súlya 3, a BA és AD élek összsúlya viszont csak 2). A feladat megoldását tehát metrizálással kezd kezdenünk. Ehhez bármely két csúcsra meg kell állapítanunk a csúcsok közt vezető legrövidebb út hosszát, ez lesz a csúcsok közti új élsúly. Ezt követően a T-be tartozó csúcsok által feszített részgráfon kell minimális összsúlyú F feszítőfát keresnünk az új élsúlyok szerint, végül F minden uv élét vissza kell cserélnünk az eredeti gráfban az u és v közt vezető (egyik) legrövidebb útra és az így kapott élhalmaz egy minimális feszítőfáját megadnunk kimenetként. Ezek alapján elég a legrövidebb utakat a T csúcsai között kiszámítanunk: ez B és D között 2 hosszú (mert minden él legalább 1 hosszú és az egy élű út hossza 3), D és E között 3 hosszú (mert az egy élű út hossza 5, és két 1 hosszú élből álló út nem vezet D és E között), B és E között 3 hosszú (az előhöz hasonlóan, de most egy élű út nincs is). A minimális feszítőfa az új élsúlyok szerint tehát tartalmazza a BD élet és vagy a DE élet vagy a BE élet (tegyük fel, hogy a DE élet választottuk). A BD élnek a $B-A-D$ út felel meg, a DE élnek a $D-A-E$ út, a feszítőfánkhoz tartozó élek az eredeti gráfban tehát a BA, AD, AD, AE élek, ennek minimális feszítőfája pedig a BA, AD, AE élek; ezek (és persze az A, B, D, E csúcsok) alkotják a kimenetként megadandó Steiner-fát.

A 6. feladat megoldása. Színezzük az éleket pozitív egész számokkal, egymás után egyesével oly módon, hogy minden e élhez azt a számot rendeljük, amely a legkisebb azok közül, melyek nincsenek hozzárendelve egyetlen e-hez csatlakozó élhez sem. Ez a színezés legfeljebb $2\Delta - 1$ színt használ (ahol Δ a gráf maximális foka), mivel minden élhez legfeljebb $2\Delta - 2$ másik él csatlakozhat. Mivel az élkromatikus szám legalább Δ, az így megadott algoritmus csakugyan legfeljebb kétszer annyi színt használ, mint az optimum, az eljárás polinomialitása pedig nyilvánvaló. Legyenek az 5 hosszú kör élei sorban a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, az a_i-vel párhuzamos él legyen b_i. Színezzük az éleket mondjuk az $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ sorrendben, ekkor rendre az $1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6$ színeket osztjuk ki (az élkromatikus szám egyébként 5, de ezt nem kellett megállapítani).