R e n d s z e r o p t i m a l i z á l á s
Tizenegyedik szerdai előadás, 2024. május 8.

1. A $G = (A, B; E)$ teljes páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alább, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \le i \le 4, 1 \le j \le 5$ esetén).

a) Igaz-e, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés G-ben?

b) Igaz-e, hogy az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_3\}$ és $\{a_4, b_4\}$ élek maximális összsúlyú párosítást alkotnak G-ben?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	1	0	2	3	1	3	2	2	0

(ZH, 2020. április 29.)

2. Legyen adott a $G(A, B; E)$ páros gráf, valamint az élhalmazán a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tegyük fel továbbá, hogy minden $v \in A \cup B$ csúcshoz adott egy $f(v)$ alsó korlát és egy $g(v)$ felső korlát. A feladatunk az, hogy megtaláljuk a G éleinek egy olyan $Z \subseteq E$ részhalmazát, amelyre teljesül, hogy minden v csúcs esetén a v-re illeszkedő Z-beli élek száma $f(v)$ és $g(v)$ között van (az egyenlőséget is mindkét esetben megengedve) és az ilyen feltételeknek megfelelő élhalmazok közül a Z összsúlya maximális. Mutassuk meg, hogy létezik polinomiális futásidejű algoritmus a fenti feladat megoldására.

---

3. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alább, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \le i \le 4, 1 \le j \le 5$ esetén).

a) A p paraméter mely értékeire igaz, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés?

b) Létezik-e p-nek olyan értéke, amely esetén a táblázatban megadott c hozzárendelés minimális összegű címkézés a G összes, nemnegatív értékű címkézései között?

c) Létezik-e p-nek olyan értéke, amely esetén a táblázatban megadott c hozzárendelés minimális összegű címkézés a G összes, valós értékű címkézései között?

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	4	3	4	p	0	2	2	3	0

(ZH, 2018. május 8.)

4. A p valós paraméter mely értékeire totálisan unimoduláris az alábbi mátrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}$$

(ZH, 2016. április 19.)

5. Legyen adott egy tetszőleges (valós, nem feltétlen négyzetes) mátrix. A feladatunk az, hogy kiválasszuk a mátrix néhány elemét úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legalább egy kiválasztott elem legyen, de az összes kiválasztott elem összege a lehető legkisebb legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására.

(ZH, 2005. november 23.)

6. Legyen adott a G páros gráf és a k pozitív egész. A feladatunk az, hogy G néhány élét „megtöbbszörözzük" úgy, hogy a végül kapott gráf k-reguláris legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus annak az eldöntésére, hogy ez lehetséges-e. (A G egy e élének a „megtöbbszörözése" azt jelenti, hogy G-hez hozzáadunk néhány további élt, amelyeknek a végpontjai azonosak e végpontjaival. A G gráf k-reguláris, ha minden csúcsának a foka k.)