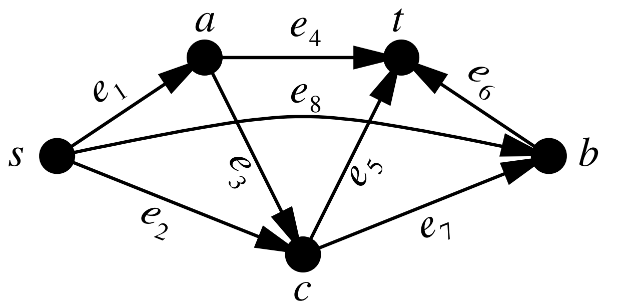
Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2024. május 23.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy a (primál) feladat maximumértéke 6?

$\max\{9x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$
ha
$5x_1 - x_2 \leq 0$
$x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2$
$2x_1 - x_3 \leq 0$
$x_1 \geq 0$

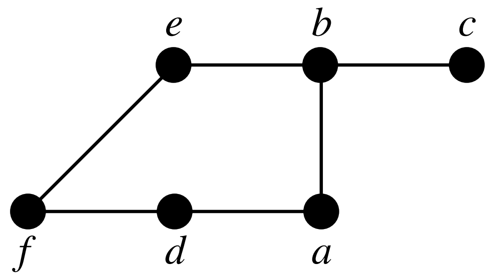
2. Tekintsük a következő minimális költségű folyam feladatot: az alábbi ábrán látható gráfban keresünk az s-ből t-be menő, 6 értékű folyamok között minimális költségűt, ha az élekhez tartozó $c(e)$ kapacitás és $k(e)$ költség értékek az alábbi táblázatban láthatók. A feladatot egy LP szolver programmal megoldva azt kaptuk, hogy a minimális költségű folyam költsége 16 és az élekhez tartozó $x(e)$ folyamértékek szintén az alábbi táblázatban láthatók. Határozzuk meg a táblázat hiányzó, □-val jelölt értékeit.



e	:	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
$c(e)$	:	3	3	3	2	4	3	3	2
$k(e)$	:	1	3	0	2	3	1	0	0
$x(e)$	:	3	□	□	□	1	3	□	□

3. Tekintsük a maximális páros részgráf keresésére tanult első approximációs algoritmust (melyben a csúcsok halmazát kezdésként tetszőlegesen kettéosztjuk). Döntsük el, hogy előfordulhat-e, hogy az algoritmus kimeneteként kapott páros részgráf élszáma pontosan az optimum fele, ha a bemeneti gráf egy 13 csúcsú fa.

4. Futtassuk le és dokumentáljuk a jobbra látható gráfra a minimális lefogó ponthalmaz probléma közelítésére tanult két algoritmust (külön-külön) úgy, hogy a kapott kimenet az adott algoritmus által adható legkisebb lefogó ponthalmaz legyen és döntsük el, hogy optimális megoldásokat kaptunk-e.



5. Legyen a Steiner-fa probléma egy bemenete az előző feladat gráfja, minden él súlya 1, $T = \{c, d, e\}$. Futtassuk le és dokumentáljuk ezen a bemeneten a tanult approximációs algoritmust és állapítsuk meg, hogy optimális eredményt ad-e.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A megoldásokat indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató

2024. május 23.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(1 pont)}$$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{2y_2\} \\ &\text{ha} \\ &5y_1 - y_2 + 2y_3 - y_4 = 9 \\ &-y_1 + y_2 = 2 \\ &2y_2 - y_3 = 3 \\ &y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

A duális felírásáért járó 5 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 4 pont levonást jelentsen.

b) Tegyük fel, hogy a primál feladat maximumértéke 6. Ekkor a dualitástétel miatt a duális minimuma is 6, (1 pont)
mert ebben az esetben a primál feladat megoldhatósága és a célfüggvény felülről korlátossága teljesül, így a dualitástétel alkalmazható. (1 pont)
Vegyük ezért a duális feladat egy optimális megoldását: $y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Ebben tehát $y_2 = 3$, mert $2y_2 = 6$ következik abból, hogy a duális célfüggvénye y^*-on 6-ot vesz fel. (1 pont)
Így a duális feladat második, illetve harmadik egyenletéből $y_1 = 1$, illetve $y_3 = 3$ adódik. Ezeket a duális feladat első egyenletébe visszahelyettesítve kapjuk, hogy $y_4 = -1$. (1 pont)
Mivel ez nem felel meg a $y_4 \ge 0$ feltételnek, ezért ellentmondásra jutottunk, (1 pont)
így a primál feladat maximumértéke nem 6, az állítás hamis. (1 pont)
(Megjegyezzük, hogy a b) kérdésre elvileg helyes megoldás volna az is, hogy megadjuk a feladatnak egy olyan megoldását, amin a primál célfüggvénye 6-nál nagyobb értéket vesz fel. Bár ilyen megoldás létezik (ugyanis a primál maximumértéke 6,25), de a megtalálása számítógép használata nélkül nagyon körülményes volna.)

A 2. feladat megoldása. Mivel a folyam értéke 6, ezért $x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) = 6$ (1 pont)
(mert ismert, hogy a folyam értéke a t-be érkező (nettó) folyammennyiségként is megkapható).(0 pont)
Ebből $x(e_5) = 1$ és $x(e_6) = 3$ miatt $x(e_4) = 2$. (1 pont)
Az a csúcsra teljesülő folyammegmaradási feltételből $x(e_3)+x(e_4) = x(e_1)$. Mivel $x(e_1) = 3$ és $x(e_4) = 2$ már ismert, ebből $x(e_3) = 1$. (2 pont)
Mivel a folyam költsége 16, ebből $x(e_1) + 3x(e_2) + 2x(e_4) + 3x(e_5) + x(e_6) = 16$ adódik (a táblázatbeli $k(e)$ értékek alapján). Ebből és a már ismert $x(e_1), x(e_4), x(e_5)$ és $x(e_6)$ értékekből $x(e_2) = 1$.(4 pont)
A c csúcsra felírt folyammegmaradási feltételből $x(e_5)+x(e_7) = x(e_2)+x(e_3)$, amiből (és a már ismert folyamértékekből) $x(e_7) = 1$. (2 pont)
Végül a b csúcsra felírt folyammegmaradási feltételből hasonlóan kapjuk, hogy $x(e_8) = 2$. (2 pont)
($x(e_8)$ értéke megkapható az $x(e_1) + x(e_2) + x(e_8) = 6$ egyenletből is, ami ismét abból adódik, hogy a folyam értéke 6 a folyamérték definíciója szerint.)

A 3. feladat megoldása. Megmutatjuk, hogy a válasz a feladat kérdésére nemleges. Az algoritmus először két részre osztja a gráf csúcshalmazát és a keresztbe menő éleket veszi be a páros részgráfba, majd a kettéosztást több körben úgy módosítja, hogy ha van olyan csúcs, melyből több él megy a saját a csoportjába, mint keresztbe, akkor ezt a csúcsot áthelyezi a másik osztályba. (1 pont)
(Ez az 1 pont persze akkor is megadható, ha valaki expliciten nem írja le az algoritmust, de a megoldásából egyértelműen kiderül, hogy erre gondol.)
A fák páros gráfok, így a keresett optimum a fa élszáma, vagyis 12 lesz. (1 pont)
Ha a kimenetként kapott páros részgráfnak 6 éle van, akkor egy d fokú csúcsból $\frac{d}{2}$ élnek kell keresztbe mennie. (Itt és az előző részpontszámnál sem probléma, ha valaki nem számolja ki, hogy hány élről van szó és csak a teljes élszám feléről beszél.) (2 pont)
Valóban: ennél kevesebb nem mehet, mert ekkor nem állt volna le az algoritmus, (2 pont)
de ennél több sem, mert akkor a keresztbe menő élek száma nagyobb lenne, mint 6. (2 pont)
Így a fa minden csúcsának páros fokúnak kell lennie, (2 pont)
ami lehetetlen, hiszen minden (legalább 2 csúcsú – ennek hiányáért ne vonjunk le pontot) fában van 1 fokú csúcs. (2 pont)
Bár a megoldásban nem jut szerephez, de ha valaki megmutatja, hogy az élszámnak párosnak kell lennie, az kaphat ezért 1 pontot, ha pedig azt is, hogy élszámnak 4-gyel is oszthatónak kell lennie, az még 2-t, feltéve persze, hogy ezekkel a pontokkal nem lépi túl az adható maximumot.

A 4. feladat megoldása. Az első algoritmus maximális párosítást keres a gráfban és az ebben szereplő élek végpontjait adja kimenetként. (Ez a pont persze akkor is megadható, ha valaki expliciten nem írja le az algoritmust, de a megoldásából egyértelműen kiderül, hogy erre gondol.) (1 pont)
A kimenet mérete így mindenképp $2\nu(G)$ lesz, tehát mindegy, hogy hogyan futtatjuk az algoritmust (vagyis melyik maximális párosítást választjuk). (1 pont)
A gráfban létezik (egyetlen) teljes párosítás, mely az ad, bc, ef élekből áll, (1 pont)
az első algoritmus kimenete tehát a, b, c, d, e, f, vagyis az összes csúcs, ami nem optimális, (1 pont)
mert a gráfban a minimális lefogó ponthalmaz a látott 3 élű párosítás miatt legalább 3 csúcsú,(1 pont)
a b, d, f pontok (pl.) pedig le is fogják az összes élet, a keresett optimum tehát 3. (1 pont)
A második algoritmus nem bővíthető párosítást keres oly módon, hogy választ egy élet, törli a végpontjait, majd a maradék gráfban megismétli az eljárást, sít. (Ha valaki csak annyit ír, hogy nem bővíthető párosítást kell keresni, az is elég és itt is érvényes, hogy ha valaki expliciten nem írja le az algoritmust, de a megoldásából egyértelműen kiderül, hogy erre gondol, akkor megkaphatja a pontot.) (1 pont)
Ha (mondjuk) az ad, be éleket választjuk ki, akkor két élű nem bővíthető párosítást kapunk, (2 pont)
ekkor a kimenet a, b, d, e lesz, aminél kisebbet nem is lehet kapni ezzel az algoritmussal, hiszen az optimum 3, az algoritmus pedig mindig páros csúcsszámú kimenetet ad. (2 pont)
Így persze ez a kimenet sem lesz optimális. (1 pont)
Aki a második algoritmust úgy futtatja, hogy nem a lehetséges legkisebb kimenetet kapja meg, az legfeljebb 2 pontot kaphat erre a részre.

Az 5. feladat megoldása. Mivel nem teljes gráfunk van, a bemenet nem metrikus, így a megoldást metrizálással kell kezdenünk. (1 pont)
(Máshogy is indokolhatjuk persze, hogy a bemenet nem metrikus.)
Ehhez meg kell keresnünk az összes pontpárra a pár tagjai közti legrövidebb utak hosszát, (1 pont)
de ebből valójában csak a T-beli csúcsok közti legrövidebb úthosszakra lesz szükség. (1 pont)
(Ha valaki kiszámolja az összes párra a legrövidebb utak hosszait (helyesen), az természetesen nem hiba, jár rá a 2 pont.)
Ezek a $(c, d), (c, e), (d, e)$ párokra rendre $3, 2, 2$. (Ezt nem szükséges indokolni.) (1 pont)
(Számolási hibáért csak akkor vonjunk le pontot, ha az T-beli csúcsok közt menő élet érint.)
A metrizálás után ezek lesznek a kérdéses élek súlyai, (1 pont)
így az algoritmus következ lépésében, amikor a T által feszített részgráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk, a két 2 súlyú élet kell választanunk (mivel ezek fát alkotnak). (1 pont)
Most az ezen élekhez tartozó legrövidebb utakat kell megkeresnünk az eredeti gráfban, ezek $c - b - e, d - f - e$, (1 pont)
végül ezen utak éleinek uniójában (1 pont)
kell egy minimális összsúlyú feszít fát keresnünk, (1 pont)
ami a bc, be, df, ef élekből áll, ez lesz a kimenet. (1 pont)
A kapott kimenet összsúlya 4, ami optimális lesz, mert a bc élnek mindenképp szerepelnie kell (hiszen csak ez illeszkedik a c terminálra), a maradék élekből pedig legalább hármat kell még bevennünk. Valóban, ha a be élet beválasztjuk, akkor egy d-re illeszkedő él mellett még egy továbbira is szükségünk lesz, ha be-t nem választjuk be, akkor pedig minden más él kelleni fog. (2 pont)