Rendszeroptimalizálás
Pótpótzárthelyi feladatok
2024. június 3.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$ választással a primál, az $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3$ választással pedig a duális feladat egy-egy optimális megoldását adtuk meg?

$\max\{-7x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 18x_4\}$
ha
$2x_1 - x_3 \geq 0$
$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 0$
$x_1 - 4x_2 - 6x_4 \geq 3$

2. Döntsük el az alábbi mátrixokról, hogy totálisan unimodulárisak-e.

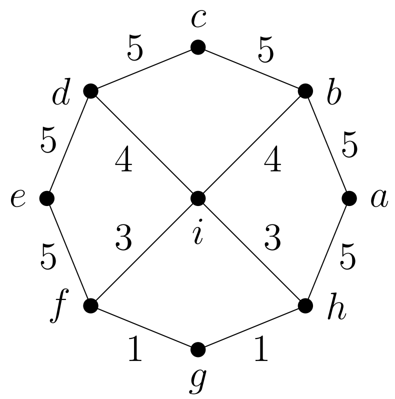
a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Egy 4 csúcsú kör csúcsai sorrendben a, b, c, d. A páros gráfok pontos élszínezésére tanult algoritmus egy futtatása során az ab élet pirosra, a cd élet kékre színeztük, a többi éllel még nem foglalkoztunk. Fejezzük be a futtatást és a megtett lépéseket dokumentáljuk.

4. Futtassuk le és dokumentáljuk a 8 csúcsú körre a minimális lefogó ponthalmaz probléma közelítésére tanult két algoritmust (külön-külön) úgy, hogy a kapott kimenet az adott algoritmus által adható legkisebb lefogó ponthalmaz legyen és döntsük el, hogy optimális megoldásokat kaptunk-e.

5. Futtassuk le és dokumentáljuk a Steiner-fa probléma közelítésére tanult approximációs algoritmust az alábbi bemeneten $T = \{b, d, f, h\}$ mellett.



A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A megoldásokat indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás
Pótpótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató

2024. június 3.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 2 & 18 \end{pmatrix}.$$ (1 pont)

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{-3y_3\} \\ &\text{ha} \\ &-2y_1 - 3y_2 - y_3 = -7 \\ &5y_2 + 4y_3 = 12 \\ &y_1 - 4y_2 = 2 \\ &-5y_2 + 6y_3 = 18 \\ &y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$ (5 pont)

A duális felírásáért járó 5 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 4 pont levonást jelentsen.

b) A megadott primál megoldáson a célfüggvényérték -9, (0 pont)
ezért a primál maximuma legalább -9. (2 pont)
A megadott duális megoldáson is a célfüggvényérték -9, (0 pont)
Ezért a duális minimuma legföljebb -9. (2 pont)
Mivel a dualitástétel értelmében a primál maximuma és a duális minimuma egyenlő, így a fentiek miatt ez a közös érték csak -9 lehet. Ebből következik, hogy mindkét megadott megoldás optimális. (2 pont)

A 2. feladat megoldása. a) Az első és harmadik sorok és oszlopok alkotta 2×2-es részmátrix: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Mivel ennek a determinánsa (-2), (2 pont)
ezért a mátrix nem totálisan unimoduláris. (2 pont)
Ha egy megoldó észreveszi és (a tanult lemmára hivatkozva) helyesen indokolja, hogy a 2. és 4. sor és oszlop a TU-ság változtatása nélkül elhagyható, azért kaphat 3 pontot akkor is, ha ezt felhasználva nem tudja befejezni a megoldást.

b) Ez a mátrix annak a páros gráfnak az illeszkedési mátrixa, aminek az egyik pontosztályában három, a másikban két csúcs van és a két pontosztály közötti összes lehetséges (vagyis $3 \cdot 2 = 6$) él be van húzva (egy-egy példányban). Valóban, a mátrix első három sora felel meg a 3-as pontosztálynak, az utolsó kettő a 2-esnek és a mátrix oszlopai sorban a hat élnek. (3 pont)
Mivel minden páros gráf illeszkedési mátrixa a tanultak szerint TU, ezért ez a mátrix is az. (3 pont)

A 3. feladat megoldása.
A páros gráf egyik osztályában az a, c, a másikban a b, d csúcsok lesznek. (0 pont)
Az a és b csúcsok egyetlen szabad színe a kék, a c és d csúcsok egyetlen szabad színe a piros. (2 pont)
Így akár az ad (válasszuk mondjuk ezt), akár a bc éllel folytatjuk a színezést, a végpontoknak nem lesz közös szabad színük. (2 pont)
A következő lépés ezért az a (vagy a d, de most válasszuk az a-t) csúcs piros-kék komponensében a piros és kék élek szerepének felcserélése. (2 pont)
A komponens az a, b csúcsokból és az ab piros élből áll (nem baj, ha valaki a csúcsokról nem ír). (1 pont)
Ezt az élet színezzük tehát át kékre. (1 pont)
Ezzel a piros szín szabaddá vált a-nál; az ad élet megszínezzük pirosra. (2 pont)
Egy él van hátra, a bc, ennek végpontjaiban a piros szabad szín, így ezt pirosra színezzük, amivel az algoritmus futása be is fejeződött. (2 pont)

A 4. feladat megoldása. Legyenek a kör csúcsai sorban a, b, c, d, e, f, g, h. Az első algoritmus maximális párosítást keres a gráfban és az ebben szereplő élek végpontjait adja kimenetként. (Ez a pont persze akkor is megadható, ha valaki expliciten nem írja le az algoritmust, de a megoldásából egyértelműen kiderül, hogy erre gondol.) (1 pont)
A gráfban létezik teljes párosítás, pl. az ab, cd, ef, gh élhalmaz, (1 pont)
az első algoritmus kimenete tehát a, b, c, d, e, f, g, h, vagyis az összes csúcs. (1 pont)
A gráf páros gráf, hiszen nincs benne páratlan kör, (1 pont)
így a minimális lefogó ponthalmaz és a maximális párosítás mérete azonos, vagyis mindkettő 4, (1 pont)
így az első algoritmus kimenete nem optimális. (0 pont)
Persze máshogy is meg lehet indokolni, hogy $\tau = 4$.
A második algoritmus nem bővíthető párosítást keres oly módon, hogy választ egy élet, törli a végpontjait, majd a maradék gráfban megismétli az eljárást, sít. (Ha valaki csak annyit ír, hogy nem bővíthető párosítást kell keresni, az is elég és itt is érvényes, hogy ha valaki expliciten nem írja le az algoritmust, de a megoldásából egyértelműen kiderül, hogy erre gondol, akkor megkaphatja a pontot.) (1 pont)
Ha (mondjuk) az ab, de, fg éleket választjuk ki, akkor 3 élű nem bővíthető párosítást kapunk, (2 pont)
ekkor a kimenet a, b, d, e, f, g lesz. (1 pont)
Ennél kisebbet nem is lehet kapni ezzel az algoritmussal. Ha ugyanis találnánk legfeljebb 2 élű nem bővíthető párosítást, akkor a 2 él 4 végpontja lefogó ponthalmaz lenne a gráfban, (2 pont)
de 4 csúccsal csak akkor tudjuk lefogni az összes élet, ha a csúcsok közt nincs két szomszédos. (1 pont)
Így persze ez a kimenet sem lesz optimális. (0 pont)

Aki a második algoritmust úgy futtatja, hogy nem a lehetséges legkisebb kimenetet kapja meg, az legfeljebb 2 pontot kaphat erre a részre.

Az 5. feladat megoldása. Mivel nem teljes gráfunk van, a bemenet nem metrikus, így a megoldást metrizálással kell kezdenünk. (1 pont)
Ehhez meg kell keresnünk az összes pontpárra a pár tagjai közti legrövidebb utak hosszát, (1 pont)
de ebből valójában csak a T-beli csúcsok közti legrövidebb úthosszakra lesz szükség. (1 pont)
(Ha valaki kiszámolja az összes párra a legrövidebb utak hosszait (helyesen), az természetesen nem hiba, jár rá az előző 2 pont.)
Ezek a $(b, d), (b, f), (b, h), (d, f), (d, h), (f, h)$ párokra rendre $8, 7, 7, 7, 7, 2$. (Ezt nem szükséges indokolni.) (1 pont)
(Számolási hibáért csak akkor vonjunk le pontot, ha az T-beli csúcsok közt menő élet érint.)
A metrizálás után ezek lesznek a kérdéses élek súlyai, (1 pont)
így az algoritmus következő lépésében, amikor a T által feszített részgráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk, egy 2 súlyú és két 7 súlyú élet fogunk kapni, nevezetesen az fh élet és pl. a df, bh

éleket. (1 pont)

Most az ezen élekhez tartozó legrövidebb utakat kell megkeresnünk az eredeti gráfban, ezek $f - g - h, d - i - f, b - i - h,$ (2 pont)

végül ezen utak éleinek uniójában (1 pont)

kell egy minimális összsúlyú feszítőfát keresnünk, (2 pont)

ami (pl.) a di, if, fg, gh, bi élekből áll, ez lesz a kimenet. (1 pont)

Megjegyzés. Az utolsó lépésben mindenképp ki kell majd hagyni egy élet az utak éleinek uniójaként kapott gráfból, mivel az 6 élű és 6 csúcsú lesz. A fenti példában egy 4 élű kör egyik élét hagytuk el, de van olyan megoldás is, amikor a kör két párhuzamos élből áll. Ilyenkor is győződjünk meg róla, hogy a megoldó érti, hogy miért az a kimenet, ami.