Rendszeroptimalizálás
Pótpótzárthelyi feladatok
2022. május 27.

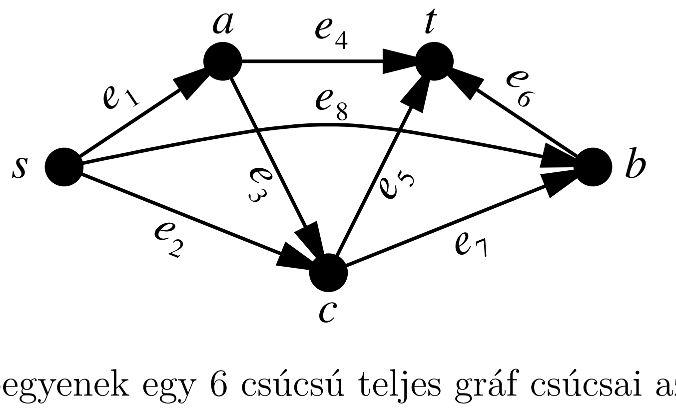
1. a) Oldjuk meg a jobbra látható lineáris programozási feladatot.
b) Változtassuk meg a feladat célfüggvényét így: $\max\{t \cdot x_1 + 3x_2\}$. A t valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy az $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ választással a feladat egy optimális (vagyis a célfüggvényt maximalizáló) megoldását kapjuk?

$\max\{4x_1 + 3x_2\}$
ha
$3x_1 + 2x_2 \le 18$
$3x_1 + x_2 \le 15$
$3x_1 - x_2 \le 0$
$x_1 \ge 0$

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)
b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét.

$\max\{3x_2 + x_3\}$
ha
$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \le 3$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \ge 2$
$2x_2 + x_3 \le 0$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

3. Tekintsük a következő minimális költségű folyam feladatot: az alábbi ábrán látható gráfban keresünk az s-ből t-be menő, legalább 6 értékű folyamok között minimális költségűt, ha az élekhez tartozó $c(e)$ kapacitás és $k(e)$ költség értékek az alábbi táblázatban láthatók. Írjuk fel ezt a feladatot lineáris programként (vagyis adjunk meg egy olyan lineáris programozási feladatot, amelynek a megoldása ekvivalens a megadott minimális költségű folyam feladattal). A lineáris programot *ne* mátrixos alakban adjuk meg, hanem a változók, a feltételek és a célfüggvény (az első két feladatban látotthoz hasonló alakú) kiírásával.



e	:	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
$c(e)$	:	3	3	1	2	4	3	1	2
$k(e)$	:	2	4	1	3	4	2	1	1

4. Legyenek egy 6 csúcsú teljes gráf csúcsai az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok, az $\{i, j\}$ él súlya legyen $\min(i, j)$ (minden $1 \le i, j \le 6, i \ne j$ esetén). Hajtsuk végre a Steiner-fa probléma közelítésére tanult approximációs algoritmust a gráfon $T = \{3, 4, 5, 6\}$ mellett.

5. Egy probléma bemenete az $a > 100$ egész szám. Döntsük el, hogy a problémára adott $(\log\log\log a)^{\log\log a}$ lépésszámú algoritmus polinomiális-e.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni. Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

Rendszeroptimalizálás
Pótpótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató

2022. május 27.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

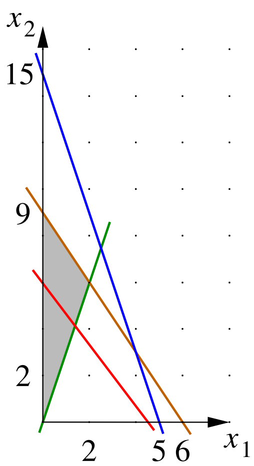
Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása.

a) A feladat megoldáshalmazát koordinátarendszerben ábrázoljuk. Az első, második, illetve harmadik egyenlőtlenség megoldáshalmaza sorra a barna és kék egyenesek alatti, illetve a zöld egyenes feletti félsíkok, az $x_1 \geq 0$ egyenlőtlenségé pedig nyilván az x_2 tengelytől jobbra eső félsík. Ezeknek a metszete a megoldáshalmaz, amit az ábrán a szürkével jelölt háromszög ábrázol.



(2 pont)

Azok a pontok, amiken a célfüggvény a (tetszőlegesen rögzített) p értéket veszi fel, a $4x_1 + 3x_2 = p$ egyenest alkotják. Átrendezve: $x_2 = \frac{p}{3} - \frac{4}{3}x_1$. Így az egyenes meredeksége (p-től függetlenül) $-\frac{4}{3}$. Például a $p = 18$ értékre az egyenest az ábrán pirossal ábrázoltuk. (1 pont)

p növelésére a piros egyenes „önmagával párhuzamosan" felfelé csúszik (mert a meredeksége változatlan). A kérdés az, hogy p-nek mi az a legnagyobb értéke, amelyre még metszi a megoldáshalmazt. (1 pont)

Mivel a piros egyenes meredeksége mindig $-\frac{4}{3}$ és így nagyobb $(-\frac{3}{2})$-nél, a barna egyenes meredekségénél, ezért ez arra a p-re következik be, amelyre a piros egyenes áthalad a barna egyenes és az x_2-tengely metszéspontján, vagyis a $(0; 9)$ ponton. (1 pont)

A célfüggvény tehát az $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ értékekre veszi fel a maximumát, a maximumérték pedig $p = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 27$. (1 pont)

(Azt a tényt, hogy az optimumhely valóban az $(0; 9)$ pont indokolhatjuk azt a szemlélet alapján nyilvánvaló tényt felhasználva is, hogy a célfüggvény optimuma biztosan felvétetik a megoldáshalmaz valamelyik csúcsán. Ezeket meghatározva: $(0; 9)$, $(2; 6)$, $(0; 0)$. Ezeken kiszámítva a célfüggvény értékét sorra a 27, 26, 0 értékeket kapjuk, amelyek közül valóban a 27 a legnagyobb.)

b) Az a) rész gondolatmenetét követjük: $(0;9)$ pont akkor lesz maximumhely, ha a $t \cdot x_1 + 3x_2 = p$ egyenletű piros egyenes meredeksége nagyobb $(-\frac{3}{2})$-nél, a barna egyenes meredekségénél. (3 pont)
A $t \cdot x_1 + 3x_2 = p$ egyenletű piros egyenes meredeksége $-\frac{t}{3}$, amiből tehát $-\frac{t}{3} \geq -\frac{3}{2}$ adódik. (2 pont)
Ebből $t \leq \frac{9}{2}$. A $(0;9)$ pont tehát a $t \leq \frac{9}{2}$ paraméter értékekre maximalizálja a célfüggvényt. (1 pont)
(A b) kérdés is megválaszolható a megoldáshalmaz csúcsainak végigvizsgálásán alapuló gondolatmenettel.)

A 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(2 pont)

(Amint látható, a második egyenlőtlenséget megszoroztuk (-1)-gyel.)
Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}
&\min\{3y_1 - 2y_2\} \\
&\text{ha} \\
&3y_1 - 2y_2 \geq 0 \\
&2y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 3 \\
&5y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 1 \\
&-3y_1 + 2y_2 \geq 0 \\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$
(4 pont)

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) A primál feladat rendszere megoldható, például az $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ választással.
A duális feladat rendszere is megoldható, például az $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 2$ választással. A duális megoldhatóságából pedig a tanultak szerint következik, hogy a primál feladat célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán. (2 pont)
A duális feladat első és negyedik egyenlőtlensége együtt az $3y_1 - 2y_2 = 0$ egyenletet adja. Mivel ennek a bal oldala épp a duális célfüggvénye, ezért a duális feladat minden megoldásához a 0 célfüggvényérték tartozik. Így a duális feladat minimumértéke 0. (2 pont)
Ebből pedig a dualitástétel szerint következik, hogy a primál feladat maximumértéke is 0. (2 pont)
A primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 7 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 7 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.

A 3. feladat megoldása. A minimális költségű folyamfeladat tanult definíciója szerint minden élhez bevezetünk egy változót: x_i jelöli az e_i élen a folyam értékét minden $1 \leq i \leq 8$ esetén. (2 pont)
Az a, b és c csúcsokra fel kell kell írnunk a folyammegmaradási feltételeket:

$$\begin{aligned}
x_3 + x_4 - x_1 &= 0 \\
x_6 - x_7 - x_8 &= 0 \\
x_5 + x_7 - x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}$$
(2 pont)

Minden élre fel kell írnunk a rá vonatkozó kapacitás feltételt: $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 3$, $x_3 \leq 1$, $x_4 \leq 2$, $x_5 \leq 4$, $x_6 \leq 3$, $x_7 \leq 1$, $x_8 \leq 2$. (2 pont)
Minden élre fel kell írnunk a nemnegativitási feltételt: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$, $x_8 \geq 0$. (2 pont)
Elő kell írnunk, hogy a folyam értéke legalább 6 legyen: $x_1 + x_2 + x_8 \geq 6$. (Ez a feltétel lehet $x_1 + x_2 + x_8 = 6$ is, vagy akár (t-nél mérve) $x_4 + x_5 + x_6 \geq 6$ vagy $x_4 + x_5 + x_6 = 6$ is. (2 pont)
Végül fel kell írnunk a célfüggvényt, az összköltség minimalizálását:

$$\min\{2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8\}.$$
(2 pont)

Ezzel az LP feladat felírása teljes.

A 4. feladat megoldása. A bemenet nem metrikus, mert pl. az $\{5,6\}$ él súlya 5, míg az $\{5,1\}$ és $\{1,6\}$ élek súlyöszege csak 2. (1 pont)

Az első lépésünk tehát a metrizálás kell legyen. (1 pont)

Az első 2 pontot adjuk meg annak is, aki nem vizsgálja, hogy metrikus-e a bemenet, hanem automatikusan a metrizálással kezdi az algoritmust (ez ugyanis semmiképp sem lehet hiba, legfeljebb fölösleges) feltéve, hogy az nagyjából helyes.

Ehhez meg kell keresnünk az összes pontpárra a pár tagjai közti legrövidebb utak hosszát, (1 pont)

de ebből valójában csak a T-beli csúcsok közti legrövidebb úthosszakra lesz szükség. (1 pont)

(Ha valaki kiszámolja az összes párra a legrövidebb utak hosszait (helyesen), az természetesen nem hiba, jár rá az előző 2 pont.)

A kérdéses úthossz az összes (számunkra érdekes) pár esetén 2, a metrizálás után ezek lesznek a kérdéses élek súlyai, (1 pont)

így az algoritmus következő lépésében, amikor a T által feszített részgráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk, bármelyik fát választhatjuk, válasszuk mondjuk a $\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}$ éleket. (1 pont)

Most az ezen élekhez tartozó legrövidebb utakat kell megkeresnünk az eredeti gráfban, ezek $3-1-4$, $4-1-5$ és $5-1-6$, (1 pont)

végül ezen utak éleinek uniójában (2 pont)

kell egy minimális összsúlyú feszítőfát keresnünk, (2 pont)

ami persze az $\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,5\}$ élekből áll, ez lesz a kimenet. (1 pont)

Az utolsó előtti pontszám akkor jár, ha a megoldó tisztában van vele, hogy a kapott élhalmaz egy (minimális) feszítőfáját kell megadni (nem pedig magát az élhalmazt vagy egy abból egyszerűen a párhuzamos élek megszüntetésével kapott élhalmazt). A legrövidebb utak és a minimális összsúlyú feszítőfa meghatározásakor elvileg megfelelő algoritmusokat (pl. Dijkstra és Kruskal) kéne használni, de ezek most persze ránézésre is meghatározhatók. Számolási hibáért darabonként 1 pontot vonjunk le, de ha a számolási hiba a legrövidebb utak meghatározásánál a számunkra érdektelen (vagyis nem T által feszített) élek súlyaival kapcsolatos, akkor nem kell érte pontot levonni. Győződjünk meg ugyanakkor arról, hogy valóban csak számolási és nem elvi hibáról van szó.

Az 5. feladat megoldása. A bemenet mérete (az egészrész jelet és a plusz 1-et hanyagolva) $n=\log a$.

(Természetesen nem baj, ha valaki az egészrészt és a plusz 1-et nem hanyagolja el.) (2 pont)

A kérdéses lépésszám a bemenet méretében megadva $(\log\log n)^{\log n}$. (1 pont)

A logaritmusfüggvény definíciója alapján $\log\log n = 2^{\log\log\log n}$, (1 pont)

így a lépésszám $(2^{\log\log\log n})^{\log n} = 2^{\log n\cdot\log\log\log n}$, (1 pont)

vagyis $(2^{\log n})^{\log\log\log n}$, (1 pont)

ami nem más, mint $n^{\log\log\log n}$. (2 pont)

Mivel a kitevő végtelenhez tart (ha n végtelenhez tart), (2 pont)

ezért a lépésszám semmilyen c_1 és c_2 konstansok mellett sem korlátozható felülről $c_1n^{c_2}$-vel, így nem polinomiális. (2 pont)