R e n d s z e r o p t i m a l i z á l á s

Tizedik keddi előadás, 2022. május 9.

1. A p valós paraméter mely értékeire totálisan unimoduláris az alábbi mátrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}$$

(ZH, 2016. április 19.)

2. Legyen adott a $G(A, B; E)$ páros gráf, valamint az élhalmazán a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tegyük fel továbbá, hogy minden $v \in A \cup B$ csúcshoz adott egy $f(v)$ alsó korlát és egy $g(v)$ felső korlát. A feladatunk az, hogy megtaláljuk a G éleinek egy olyan $Z \subseteq E$ részhalmazát, amelyre teljesül, hogy minden v csúcs esetén a v-re illeszkedő Z-beli élek száma $f(v)$ és $g(v)$ között van (az egyenlőséget is mindkét esetben megengedve) és az ilyen feltételeknek megfelelő élhalmazok közül a Z összsúlya maximális.

a) Írjuk fel ezt a feladatot egészértékű programozási feladatként.

b) Írjuk fel a kapott IP feladat együtthatómátrixát és mutassuk meg róla, hogy az totálisan unimoduláris.

c) Mutassuk meg, hogy létezik polinomiális futásidejű algoritmus a fenti feladat megoldására.

---

3. Legyen adott egy tetszőleges (valós, nem feltétlen négyzetes) mátrix. A feladatunk az, hogy kiválasszuk a mátrix néhány elemét úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legalább egy kiválasztott elem legyen, de az összes kiválasztott elem összege a lehető legkisebb legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására.

(ZH, 2005. november 23.)

4. Legyen adott a G páros gráf és a k pozitív egész. A feladatunk az, hogy G néhány élét „megtöbbszörözzük" úgy, hogy a végül kapott gráf k-reguláris legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus annak az eldöntésére, hogy ez lehetséges-e. (A G egy e élének a „megtöbbszörözése" azt jelenti, hogy G-hez hozzáadunk néhány további élt, amelyeknek a végpontjai azonosak e végpontjaival. A G gráf k-reguláris, ha minden csúcsának a foka k.)

5. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris. Mutassuk meg, hogy ekkor G páros gráf. (Segítség: egy BSz2-ből hajdan tanult tétel szerint G akkor és csak akkor páros gráf, ha nem tartalmaz páratlan kört.)