Rendszeroptimalizálás

Kilencedik keddi előadás, 2022. május 3.

1. Totálisan unimodulárisak-e az alábbi mátrixok?

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Egy adott G irányított gráf éleinek egy D halmazát *di-Euler részgráfnak* nevezzük, ha minden v csúcs esetén a v-be belépő D-beli élek száma megegyezik a v-ből kilépő D-beli élek számával. Ha adott egy G irányított gráf és az élein egy $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény, akkor a *Maximális Összsúlyú Di-Euler Részgráf* feladatban a G-nek egy olyan D di-Euler részgráfját kell megtalálni, amelyben a D-beli élek összsúlya maximális.

a) Írjuk fel ezt a feladatot egészértékű programozási feladatként.

b) Írjuk fel a kapott IP feladat együtthatómátrixát és mutassuk meg róla, hogy az totálisan unimoduláris.

c) Mutassuk meg, hogy létezik polinomiális futásidejű algoritmus a Maximális Összsúlyú Di-Euler Részgráf feladatra.

---

3. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha a totálisan unimoduláris A mátrixhoz hozzáveszünk egy csupa 1-eseket tartalmazó oszlopot, a kapott mátrix is totálisan unimoduláris lesz.

b) Ha a totálisan unimoduláris A mátrix minden $(+1)$-es elemét kicseréljük (-1)-esre és minden (-1)-es elemét kicseréljük $(+1)$-esre, a kapott mátrix is totálisan unimoduláris lesz.

c) Ha a totálisan unimoduláris A mátrix valamelyik nemnulla elemét kicseréljük 0-ra, a kapott mátrix is totálisan unimoduláris lesz. (ZH, 2013. május 2.)

d) Ha A egy $k \times n$-es, B pedig egy $\ell \times n$-es totálisan unimoduláris mátrix, akkor az ezek „egymásra pakolásával" kapott $(k + \ell) \times n$-es mátrix is totálisan unimoduláris lesz.

4. Tegyük fel, hogy az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldható és a cx célfüggvény felülről korlátos a megoldáshalmazán. Tegyük fel továbbá, hogy az A mátrix TU és b és c is egész vektorok. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\max\{cx : Ax \le b, x \text{ egész}\} = \min\{yb : yA = c, y \ge 0, y \text{ egész}\}.$$