R e n d s z e r o p t i m a l i z á l á s

Első keddi előadás, 2022. február 15.

1. Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ és tegyük fel, hogy az $\{a_2, b_4\}$ páron kívül minden $1 \le i, j \le 4$ esetén a_i szomszédos b_j-vel a $G(A, B; E)$ páros gráfban. Továbbá legyen az $\{a_i, b_j\}$ él súlya a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. (X jelöli, hogy a megfelelő él nincs benne a gráfban.)

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & X \\ 4 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Igaz-e, hogy az alábbi táblázatban megadott értékek G egy címkézését határozzák meg?

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
2	0	0	-1	5	3	3	0

b) Mutassuk meg, hogy a mátrix főátlójának megfelelő élek (vagyis az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_4, b_4\}$ élek) maximális összsúlyú teljes párosítást alkotnak G-ben.

c) Adjunk meg egy maximális súlyú párosítást G-ben.

2. Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ és tegyük fel, hogy minden $1 \le i, j \le 5$ esetén a_i szomszédos b_j-vel a $G(A, B; E)$ páros gráfban. Továbbá legyen az $\{a_i, b_j\}$ él súlya a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló szám minden $1 \le i, j \le 5$ esetén.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Az α valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy az alábbi táblázatban megadott értékek G egy címkézését határozzák meg?

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	4	6	6	6	0	0	1	1	α

b) Az α paraméter mely értékeire teljesül, hogy a fenti táblázatban megadott értékek G egy minimális összegű címkézését határozzák meg? (Más szóval: milyen α esetén igaz, hogy G-nek nincs olyan címkézése, amelyben az összes címke összege kisebb volna, mint a fentiben?)

(ZH, 2011. április 21.)

3. Legyen $G(A, B; E)$ páros gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ egy súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá $c : (A \cup B) \to \mathbb{R}^+$ a G-nek egy olyan címkézése, amelyben $c(v) \ge 0$ teljesül minden $v \in A \cup B$ csúcsra. Mutassuk meg, hogy G-ben a maximális súlyú párosítás összsúlya legföljebb $\sum_{v \in A \cup B} c(v)$, vagyis az összes címke összege. (Figyelem: a feladat maximális összsúlyú *párosításról*, nem pedig teljes párosításról szól.)

4. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \le i \le 9$ és $1 \le j \le 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. A hajdan (BSz2-ből) tanult javító utas algoritmus segítségével határozzunk meg G-ben egy maximális párosítást.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$