Egészértékű programozás totálisan unimoduláris együtthatómátrixszal

Írta: Szeszlér Dávid
A fordításban közreműködött: Szekeres Dániel

1. Totális unimodularitás

Míg a lineáris programozás polinomiális időben megoldható, az egészértékű programozás valószínűleg sosem lesz az (hiszen ez egy NP-nehéz probléma). Sok gyakorlati alkalmazás azonban csak egészértékű programozással kezelhető. Mi tehát a kiút? Az egyik irány, hogy megpróbálunk a lehetőségek határain belül minél hatékonyabb algoritmusokat fejleszteni – remélve, hogy így meg fogunk tudni oldani elég nagy méretű feladat feladatokat ahhoz, hogy a gyakorlati életben felmerülő problémákat is kezelni tudjunk. Van azonban egy másik ígéretes irány is: megkereshetjük az egészértékű programozásnak egy olyan speciális esetét, ami elég szűk ahhoz, hogy hatékonyan megoldható legyen, de elég széles ahhoz, hogy gyakorlati szempontból érdekes alkalmazási lehetőségeket tartalmazzon. A következőkben ezt az irányt követjük.

Definíció. *Egy mátrix* totálisan unimoduláris *(vagy röviden* TU*), ha minden négyzetes részmátrixának a determinánsa 0, 1, vagy* -1*.*

Emlékezzünk vissza, hogy egy mátrix *négyzetes részmátrixait* úgy kaphatjuk meg, hogy kiválasztunk néhány (nem feltétlenül szomszédos) sort és ugyanennyi oszlopot és az ezek kereszteződéseiben álló elemeket vizsgáljuk. Természetesen egy totálisan unimoduláris mátrix minden eleme csak 0, 1 vagy -1 lehet, mivel minden elem maga is egy 1×1-es négyzetes részmátrixot alkot. Ez azonban nem elégséges, mint azt a lentebbi A mátrix is mutatja: nem totálisan unimoduláris, hiszen a determinánsa 2. A B mátrix totálisan unimoduláris, ami igazolható mind a három 2×2-es részmátrixának (és a 6 elemének) ellenőrzésével. A C mátrix ismét nem totálisan unimoduláris: annak a 2×2 részmátrixnak, amit a négy sarkában lévő elem kiválasztásával kapunk, a determinánsa -2 (az összes többi részmátrixa megfelelne a TU definíciójának).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A TU mátrixok fogalmának fontossága a következő tételben rejlik.

Tétel. *Tegyük fel hogy adott a* $\max\{cx : Ax \le b\}$ *lineáris program úgy, hogy* $Ax \le b$ *megoldható és* $\{cx : Ax \le b\}$ *felülről korlátos. Tegyük fel ezen felül, hogy* A *totálisan unimoduláris és* b *egy egész számokból álló vektor. Ekkor* $\max\{cx : Ax \le b\}$ *felveszi a maximumát egy egész számokból álló vektoron.*

Ezt a tételt itt nem bizonyítjuk, inkább az alkalmazásaira koncentrálunk. Fontos hangsúlyozni, hogy a tétel *nem azt állítja*, hogy egy, a feltételeknek megfelelő LP feladat *minden* optimális megoldása egész – ez ugyanis nem volna igaz; csak annyit állít, hogy az optimális megoldások között van egész vektor is.

Bár a fenti tétel a $\max\{cx : Ax \le b\}$ LP feladatról szól, az alkalmazásaiban (a fentebb írtaknak megfelelően) IP feladatok szerepelnek. Valóban, a tételből következik, hogy ha A TU és b egész számokból áll, akkor a lineáris és az egészértékű programozás komplexitása közötti különbség eltűnik:

a $\max\{cx : Ax \leq b, x \text{ egész}\}$ egészértékű programot hatékonyan megoldhatjuk az LP relaxációjának a megoldásával. Valóban: ha a relaxáció megoldásakor az derül ki, hogy az $Ax \leq b$ rendszer nem megoldható, akkor nyilván egész megoldása sem lehet, így az IP rendszere sem megoldható. Hasonlóan: ha az derül ki, hogy az LP relaxáció rendszere megoldható, de a célfüggvénye nem felülről korlátos a megoldáshalmazán, akkor ugyanez az IP feladatról is elmondható*. Ha viszont az LP relaxáció rendszere megoldható és a célfüggvénye is felülről korlátos, akkor a fenti tételből következik, hogy az IP és az LP feladat optimumértéke megegyezik. Sőt, fontos (bizonyítás nélkül) megjegyezni, hogy ilyenkor az egészértékű optimum léte nem csak elméletben garantált: az LP feladatát megoldó algoritmusokból nyerhető is egy ilyen megoldás.

A fenti tétel különféle alkalmazásaiban gyakran előfordul, hogy a megoldandó feladat kicsit megváltozik, ami az együtthatómátrix kisebb módosításával jár. Ha például ez a módosítás azt jelenti, hogy egy egyenlőtlenségből egyenlet lesz, ez egy újabb sort ad az együtthatómátrixhoz, amely egy már létező sor negáltja. Egy másik példa, amikor egy változót felülről korlátozunk: ez egy új sort ad az együtthatómátrixhoz, melynek minden eleme 0, egyetlen 1-est kivéve. A következő egyszerű, de hasznos lemma kimondja, hogy ezek a kis változtatások megtartják a mátrix TU tulajdonságát.

Lemma. *Egy mátrix totálisan unimoduláris marad, ha*

1. *egyik sorát vagy oszlopát negáljuk;*
2. *egy új sort vagy oszlopot adunk hozzá, melynek minden eleme nulla, egyetlen 1-es kivételével;*
3. *a mátrix egyik sorának másolatát adjuk a mátrixhoz új sorként, vagy egyik oszlopának másolatát új oszlopként;*
4. *transzponáljuk.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan mind a négy esetben azokat a részmátrixokat kell megvizsgálnunk, amikre az adott művelet hatással volt.

1. Ha egy sort vagy oszlopot negálunk, az az ez által érintett részmátrixokban is a megfelelő sor vagy oszlop negálását eredményezi, ezért a determinánsa is negáltjára változik; így benne marad a $\{1, -1, 0\}$ halmazban.

2. Egy érintett $k \times k$-as M részmátrixot az újonnan hozzáadott sor vagy oszlop mentén kifejtve azonnal azt kapjuk, hogy $\det M$ vagy 0 (ha az új sor vagy oszlop M-hez tartozó része csak 0-kat tartalmaz) vagy $\det M = (\pm 1) \cdot \det M'$, ahol M' egy $(k-1) \times (k-1)$-es részmátrix (az eredeti mátrixban). Mivel $\det M' \in \{1, -1, 0\}$, nyilván $\det M \in \{1, -1, 0\}$ is igaz.

3. Ha egy részmátrix tartalmazza mind az eredeti, mind az új változatát a lemásolt sornak vagy oszlopnak (vagy annak egy részét), akkor van két egyforma sora vagy oszlopa, így a determinánsa 0. Ha csak az új változatot tartalmazza, akkor megkaphatjuk az eredeti mátrix egy részmátrixának a sorait vagy oszlopait permutálva. Mivel minden ilyen permutáció megkapható több sorcsere vagy oszlopcsere egymásutánjának az eredményeként és minden csere negálja a determinánst, a végleges determináns egyenlő (± 1)-szer az eredeti determinánssal; így az $\{1, -1, 0\}$ halmazban van.

4. Egy mátrix transzponálása annak minden (négyzetes) részmátrixát is transzponálja. Mivel a transzponálás nem változtatja meg a determinánst, így a totális unimodularitást sem befolyásolja. □

*Megjegyezzük, hogy ez utóbbi állítás nem magától értetődő, átgondolásra szorul; a teljesség kedvéért vázoljuk egy indoklását. Mivel az LP relaxáció célfüggvénye nem felülről korlátos, a korábban tanult tétel szerint létezik olyan z vektor, amire $Az \leq 0$ és $cz > 0$. Elég lesz megmutatni, hogy ilyen tulajdonságú egész z vektor is létezik. Valóban, ebben az esetben az $Ax \leq b$ rendszernek egy egész x_0 megoldását választva az $x_\lambda = x_0 + \lambda z$ vektor is egész lesz minden λ pozitív egészre, márpedig az előbb említett tétel bizonyításában láttuk, hogy az x_λ vektorokon tetszőlegesen nagy célfüggvényérték elérhető. Vegyük ezért az $Az \leq 0, cz > 0$ rendszer egy tetszőleges z^* megoldását és álljon az f, illetve a g vektor a z^* koordinátáinak alsó, illetve felső egészrészeiből. Ekkor a $\max\{cz : Az \leq 0, f \leq z \leq g\}$ LP feladat rendszere megoldható (hiszen z^* egy megoldása) és rajta a cz célfüggvény felülről korlátos (mint ahogyan könnyen láthatóan bármilyen célfüggvény is az volna – ezt garantálják az f és g alsó- és felső korlátok). Továbbá az alább következő lemma segítségével könnyű lesz megmutatni, hogy az együtthatómátrixa TU és benne a jobb oldalakon csak egész számok állnak. Így az előbb kimondott tétel miatt a maximuma egész z vektoron is felvétetik. Márpedig ez a maximum nyilván pozitív, hiszen z^* miatt van a feladatnak olyan megoldása, amire $cz > 0$. Ez az egész optimum tehát bizonyítja az állítást.

2. Egészértékű folyam feladatok

Ahhoz, hogy felhasználjuk a fenti tételt a totálisan unimoduláris együtthatómátrixú egészértékű programokról, találnunk kell olyan totálisan unimoduláris mátrixokat, amik előkerülnek az egészértékű programozás alkalmazásaiban. Ezeknek egy csoportját adja a következő definíció.

Definíció. *Tegyük fel, hogy G egy hurokmentes irányított gráf, melynek csúcshalmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és élhalmaza $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. G-nek a $B(G)$* illeszkedési mátrixa *egy $n \times m$-es mátrix, melyben minden $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$-re*

$$[B(G)]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j\ v_i\text{-ből indul;} \\ -1, & \text{ha } e_j\ v_i\text{-be érkezik;} \\ 0, & \text{ha } e_j \text{ nem illeszkedik } v_i\text{-re.} \end{cases}$$

Tétel. *Minden irányított gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $k \times k$-as M részmátrixot a G irányított gráf $B(G)$ illeszkedési mátrixából. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $\det M \in \{1, -1, 0\}$.

Az állítás nyilván igaz a $k = 1$ esetben: $B(G)$ minden eleme definíció szerint eleme a $\{1, -1, 0\}$ halmaznak. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és az állítást már igazoltuk minden $(k-1) \times (k-1)$-es részmátrixra. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: ha M-nek van olyan oszlopa, ami legfeljebb egy nem nulla elemet tartalmaz. Ha ez az oszlop csupa 0, akkor $\det M = 0$. Ha nem, akkor fejtsük ki M determinánsát ezen oszlop mentén. Ebből következik, hogy $\det M = (\pm 1) \cdot \det M'$, ahol M' egy $(k-1) \times (k-1)$-es részmátrixa $B(G)$-nek. Így az indukciós feltevést felhasználva következik az állítás.

2. eset: ha M minden oszlopa pontosan két nemnulla elemet tartalmaz (egy 1-est és egy (-1)-est). Ebben az esetben az M részmátrix első sorához hozzáadva az összes többit egy csupa nulla sort kapunk; mivel az ilyen lépések nem módosítják a determináns értékét és az eredményül előálló mátrix determinánsa 0 (a csupa 0 sor miatt), így ugyanez igaz M-re is. $\square$

2.1. Az egészértékű maximális folyam feladat

Ha adott egy G irányított gráf, az s termelő és a t fogyasztó csúcsok, valamint a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény, akkor a korábbi tanulmányainkból ismert maximális folyam feladat definíció szerint a következő:

$$\begin{array}{lllcl} & \max : \sum\{x(e) : e\ s\text{-ből indul}\} - \sum\{x(e) : e\ s\text{-be érkezik}\} & & & \\ & \text{úgy, hogy} & & & \\ (1) & \forall v \in V(G) \setminus \{s,t\} : & \sum\{x(e) : e\ v\text{-ből indul}\} - \sum\{x(e) : e\ v\text{-be érkezik}\} & = & 0 \\ (2) & \quad \forall e \in E(G) : & x(e) & \leq & c(e) \\ (3) & \quad \forall e \in E(G) : & x(e) & \geq & 0 \end{array}$$

Korábban már felismertük, hogy ez egy lineáris programozási feladat; írjuk most ezt fel mátrixos alakban. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1} = s, v_n = t\}$ és $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Gyűjtsük az összes változót az x oszlopvektorba úgy, hogy $x_j = x(e_j)$ minden $1 \leq j \leq m$-re. Ekkor az (1)-es ponthoz tartozó lineáris egyenletrendszert $B' \cdot x = 0$ alakban írhatjuk, ahol B' a G gráf $B(G)$ illeszkedési mátrixából kapható meg az s-hez és t-hez tartozó sorok az elhagyásával (amik $V(G)$ fenti sorszámozása miatt $B(G)$ utolsó két sora).

Ekkor a fenti lineáris programot a következő alakban írhatjuk:

$$\max\{\overline{s} \cdot x : B' \cdot x = 0, x \leq c, x \geq 0\},$$

ahol $\overline{s}$ a G mátrix $B(G)$ illeszkedési mátrixának utolsó előtti sorát jelöli, ami az s csúcshoz tartozik. Más szavakkal: a fenti lineáris program $\max\{\overline{s} \cdot x : Ax \leq b\}$ alakban írható, ahol

$$A = \left(\begin{array}{c} B' \\ \hline -B' \\ \hline E \\ \hline -E \end{array}\right) \quad \text{és} \quad b = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ \hline c \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

(és E az $m \times m$-es egységmátrixot jelöli).

A B' mátrix nyilván totálisan unimoduláris (mivel B' minden négyzetes részmátrixa egyben a $B(G)$ illeszkedési mátrixnak is részmátrixa, amiről bebizonyítottuk, hogy TU). Ezen kívül, mivel a fenti lineáris program teljes A együtthatómátrixa megkapható B'-ből a fentebb bizonyított egyszerű lemmában felsorolt műveletekkel, következik, hogy A is totálisan unimoduláris.

Ezért a TU együtthatómátrixú egészértékű programokról szóló, fentebb kimondott alaptételből következik, hogy ha a maximális folyam feladat összes élének kapacitása egész szám (ami a teljes jobb oldali vektort egészértékűvé teszi), akkor a maximális folyamok között mindig létezik olyan is, amiben a folyamérték minden élen egész szám. (Valóban, az itt használt alaptétel további két feltétele is teljesül: az LP feladat egyenlőtlenségrendszere nyilván megoldható, hiszen $x = 0$ megoldás; továbbá a célfüggvény felülről korlátos a megoldáshalmazon, hiszen például az s-ből kilépő élek összkapacitása felső korlát a maximális folyam értékére.) Ráadásul mindebből az is következik, hogy az egészértékű maximális folyam feladat megoldható hatékonyan úgy, hogy egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk az egészértékűségi feltételeket és megoldjuk az így kapott lineáris programot.

Valójában ezek az állítások nem újak: a korábban (az informatikus BSc képzésben BSz2-ből) tanult javítóutas algoritmus egy polinomiális futásidejű algoritmus a maximális folyam feladat megoldására (ha mindig a legrövidebb javítóutak egyikét választjuk) és ez az algoritmus egy egészértékű maximális folyamot állít elő, ha minden kapacitás egész szám. A fenti gondolatmenet azonban – amellett, hogy megmutatja ennek a jelenségnek az elméleti hátterét – még így is hasznos: kisebb változtatásokkal a sokkal összetettebb minimális költségű folyam feladatra is alkalmazható.

2.2. Az egészértékű minimális költségű folyam feladat

Ha adott egy G irányított gráf, amiben az s termelő, a t fogyasztó és a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény mellett még adott egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény és egy $M \in \mathbb{R}$ elvárt folyamérték is, akkor a minimális költségű folyam feladat az alábbi:

$$\begin{array}{lllcl}
 & \min : \sum_{e \in E(G)} k(e)x(e) & & & \\
 & \text{úgy, hogy} & & & \\
(1) & \forall v \in V(G) \setminus \{s,t\} : & \sum\{x(e) : e \ v\text{-ből indul}\} - \sum\{x(e) : e \ v\text{-be érkezik}\} & = & 0 \\
(2) & & \sum\{x(e) : e \ s\text{-ből indul}\} - \sum\{x(e) : e \ s\text{-be érkezik}\} & \geq & M \\
(3) & \forall e \in E(G) : & x(e) & \leq & c(e) \\
(4) & \forall e \in E(G) : & x(e) & \geq & 0
\end{array}$$

Az *egészértékű minimális költségű folyam feladatban* a fenti feltételek mellett még minden $x(e)$ folyamértéknek egész számnak is kell lennie. Ebben az esetben M-ről és a $c(e)$ élkapacitásokról is feltételezhetjük, hogy egészek (különben M-et felfelé, a $c(e)$-ket lefelé kerekíthetnénk a feladat érdemi megváltoztatása nélkül).

Ezt összehasonlítva a maximális folyam feladattal látható, hogy a (2)-es feltételtől eltekintve a két feladat feltételrendszere azonos. Ezért a fenti LP feladat mátrixos alakja szintén nagyon hasonló a maximális folyam feladatéhoz: ez felírható $\min\{\overline{k} \cdot x : A'x \leq b'\}$ alakban, ahol $\overline{k}$ az a sorvektor, ami az összes $k(e)$ élköltségből áll (úgy, hogy $\overline{k}_j = k(e_j)$ teljesül minden $1 \leq j \leq m$-re) és

$$A' = \left(\begin{array}{c} B' \\ \hline -B' \\ \hline -\overline{s} \\ \hline E \\ \hline -E \end{array} \right) \quad \text{és} \quad b' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ \hline -M \\ \hline c \\ \hline 0 \end{array} \right).$$

(Itt $\overline{s}$ továbbra is a $B(G)$ illeszkedési mátrix s-hez tartozó sorát jelöli.)

Ismét állíthatjuk, hogy az A' együtthatómátrix totálisan unimoduláris: megkapható a $B(G)$ illeszkedési mátrixból (amiről már beláttuk, hogy TU) a t-hez tartozó sor elhagyásával, majd a korábban bizonyított egyszerű lemma műveleteinek használatával. Emellett a jobb oldali vektor szintén egészértékű, mivel a nullákon kívül c koordinátáit és M-et tartalmazza (amikről feltettük, hogy egészek). Továbbá ha létezik a hálózatban legalább M értékű folyam (vagyis a rendszer megoldható), akkor a célfüggvény nyilván alulról korlátos a megoldáshalmazon: a nulla alsó korlátja.

Így – a maximális folyam feladathoz hasonlóan – a TU együtthatómátrixú IP feladatokról szóló alaptételből két fontos dolog következik: először is, ha M és az összes $c(e)$ élkapacitás egész szám és a hálózatban létezik legalább M értékű folyam, akkor a minimális költségű folyamok között mindig létezik olyan is, amiben a folyamérték minden élen egész szám. Másodszor, az egészértékű minimális költségű folyam feladat megoldható az LP relaxációjának a megoldásával (hatékonyan, akár polinomiális futásidőben is).

Megjegyezzük, hogy az eredeti (törtértékű) minimális költségű folyam feladathoz hasonlóan léteznek ennél is hatékonyabb (polinomiális futásidejű) algoritmusok az egészértékű minimális költségű folyam feladat megoldására, amik közvetlenül nem támaszkodnak a lineáris programozásra.

2.3. Az egészértékű többtermékes folyam feladat

Sajnos $k \geq 2$ esetén a k termékes folyam feladat (LP felírásának) együtthatómátrixa nem totálisan unimoduláris. Ennek oka a kapacitás feltételekben rejlik: mivel ezek az egy élhez tartozó folyamértékek összegére adnak felső korlátot, ezért ezek olyan sorokat adnak az együtthatómátrixhoz, amik k darab egyest (és egyébként nulla elemeket) tartalmaznak; ez pedig már tönkreteszi a TU tulajdonságot, ha $k \geq 2$.

Valójában a többtermékes folyam feladat egészértékű változatáról ismert, hogy NP-nehéz. Így nem csak az LP és IP elméletét használó megközelítés nem vezet polinomiális algoritmushoz, hanem egyáltalán nem is várható, hogy a feladat bármilyen polinomiális futásidejű algoritmussal megoldható legyen.

3. A totális unimodularitás alkalmazása páros gráfok párosítási feladataira

Mint azt korábban láttuk, minden irányított gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris. Az illeszkedési mátrix fogalmát azonban irányítatlan gráfokra is definiálhatjuk: egyszerűen az illeszkedést 1-gyel, a nem illeszkedést 0-val jelöljük.

Definíció. *Legyen G egy irányítatlan gráf, aminek a csúcshalmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és az élhalmaza $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. A G gráf $B(G)$ illeszkedési mátrixa az az $n \times m$-es mátrix, amiben minden $1 \leq i \leq n$-re és $1 \leq j \leq m$-re*

$$[B(G)]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ illeszkedik } v_i\text{-re;} \\ 0, & \text{ha } e_j \text{ nem illeszkedik } v_i\text{-re.} \end{cases}$$

Felmerül a kérdés, hogy az irányítatlan gráfok illeszkedési mátrixai is totálisan unimodulárisak-e. Általánosságban a válasz nemleges, amire a legegyszerűbb példa egy három csúcsú kör: könnyű ellenőrizni, hogy a (3×3-as) illeszkedési mátrixának a determinánsa ± 2. Páros gráfokra korlátozva azonban a válasz már igen.

Tétel. *Minden páros gráf illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.*

Bizonyítás. Legyen $G = (A, B; E)$ egy páros gráf (ahol A és B a csúcshalmaz két osztálya). Legyen H az az irányított gráf, melyet G-ből nyerünk úgy, hogy minden élét A-ból B felé irányítjuk. (Azaz, ha $\{a, b\} \in E(G)$ úgy, hogy $a \in A$ és $b \in B$ akkor $(a, b) \in E(H)$.) Mivel H irányított gráf, a $B(H)$ illeszkedési mátrixa (a korábban bizonyított tétel miatt) totálisan unimoduláris. A G gráf $B(G)$ illeszkedési mátrixát viszont megkaphatjuk $B(H)$-ból minden B-beli csúcshoz tartozó sor negálásával. Mivel a sorok negálása nem befolyásolja a totális unimodularitást, $B(G)$ is totálisan unimoduláris. □

3.1. A maximális összsúlyú párosítás feladat páros gráfokon

Korábban definiáltuk a maximális összsúlyú párosítás feladatot páros gráfokra és hatékony algoritmust is adtunk a megoldására. Ebben a problémában adott egy $G = (A, B; E)$ páros gráf és egy $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény a gráf élhalmazán; a feladat az, hogy G-ben egy olyan M párosítást keressünk, amire $\sum_{e \in M} w(e)$ a lehető legnagyobb. Most újra ezzel a problémával foglalkozunk abban a megközelítésben, amit a TU együtthatómátrixú egészértékű programozás tesz lehetővé.

A feladatot könnyen megfogalmazhatjuk egészértékű programként. Egy $x(e)$ bináris változót rendelünk minden e élhez: $x(e) = 1$, ha $e \in M$, és $x(e) = 0$, ha $e \notin M$. A kiválasztott élek (vagyis azok, amikre $x(e) = 1$) összsúlyát a $\sum_{e \in E} w(e)x(e)$ lineáris célfüggvény adja meg. Az a tény, hogy a kiválasztott éleknek párosítást kell alkotniuk, egyszerűen megfogalmazható lineáris egyenlőtlenségekkel: minden v csúcs esetén a v-re illeszkedő e élekhez tartozó $x(e)$ változók összege legföljebb 1 lehet. Végül pedig szokás szerint a változók binárissága a $0 \le x(e) \le 1$ egyenlőtlenségekkel biztosítható, ahol $x(e)$ egész szám.

Bár a kapott IP valóban jól leírja a feladatot, nagyon hasznos lesz az a megfigyelés, hogy ebben az $x(e) \le 1$ feltételek redundánsak, az elhagyásuk a megoldáshalmazt nem változtatja meg. Valóban, ha $x(e) \ge 2$ teljesülne egy $e = \{a, b\}$ élre, akkor (például) az a-ra illeszkedő éleken az $x(e)$ változók összege 1-nél nagyobb volna (az $x(e)$-kre vonatkozó nemnegativitási feltételek miatt). Így végül is a maximális összsúlyú párosítás feladat következő IP megfogalmazását kapjuk:

$$
\begin{array}{lllll}
 & \max : \sum_{e \in E} w(e)x(e) & & & \\
 & \text{úgy, hogy} & & & \\
(1) & \forall v \in V(G) : & \sum\{x(e) : e \text{ illeszkedik } v\text{-re}\} & \le & 1 \\
(2) & \forall e \in E(G) : & x(e) & \ge & 0 \\
(3) & \forall e \in E(G) : & x(e) & \text{egész szám} &
\end{array}
$$

A fenti IP felírás mátrixos alakja a következő:

$$\max\{wx : Q \cdot x \le \mathbf{1}, x \ge 0, x \text{ egész}\}, \qquad (*)$$

ahol a w sorvektor a $w(e)$ élsúlyokat tartalmazza, $Q = B(G)$ a G gráf illeszkedési mátrixa és $\mathbf{1}$ a csupa 1-es oszlopvektor.

Megjegyezzük, hogy a fenti IP még nem (feltétlen) páros gráfokra is helyesen írja le a maximális összsúlyú párosítás feladatot; G párosságára csak a most következő gondolatmenetben lesz szükség. Ugyanis a $Q \cdot x \le \mathbf{1}, x \ge 0$ lineáris egyenlőtlenségrendszer együttható mátrixa $\begin{pmatrix} Q \\ -E \end{pmatrix}$, ami totálisan unimoduláris (a fenti tételből és a korábban bizonyított egyszerű lemmából következően). Mivel a jobb oldalakon szintén egész számok állnak (0-k és 1-ek), ebből következik (ismét a TU mátrixokkal leírható IP feladatokra vonatkozó, fentebb kimondott alaptétel miatt), hogy az egészértékűségi feltételek elhagyhatók és az így kapott LP relaxáció optimumhelye választható úgy, hogy a változók értékei egész számok. (Ennek a teljes értékű indoklásához ismét hozzátartozik, hogy $x = 0$ megoldása az LP rendszerének és például az összes $w(e)$ élsúly abszolútértékének az összege felső korlát a célfüggvényre.) Ebből következik, hogy a maximális összsúlyú párosítás feladat páros gráfokon hatékonyan megoldható (egyszerűen az LP relaxáció megoldásával).

Persze ennek a feladatnak a hatékony (akár polinomiális futásidejű) megoldhatósága már eddig is ismert volt: ez következik Egerványnak (a tárgyból korábban tanult) algoritmusából. Sőt, az Egerváry-algoritmus hatékonyabb megoldást ad erre a feladatra, mint egy általános célú LP megoldó. Az utóbbi megközelítés előnye (a korábban látott hálózati folyam feladatok esetéhez hasonlóan), hogy könnyen adaptálhatjuk összetettebb problémákra is. Emellett érdekes és hasznos elméleti következményei is vannak.

3.2. Egerváry tétele

Beláttuk tehát, hogy a maximális összsúlyú párosítás összsúlya egyenlő a fenti $(*)$ IP feladat maximumával, ami pedig (abban az esetben, ha G páros gráf) egyenlő a relaxált LP feladat maximumértékével. Mivel ezzel a vizsgált problémát egy LP feladatra vezettük vissza, alkalmazhatjuk a lineáris programozás dualitástételét. Jelölje ezért μ a maximális összsúlyú párosítás összsúlyát (egy adott $G = (A, B; E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén). Tudjuk tehát, hogy $\mu = \max\{wx : Q \cdot x \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$. Mivel fentebb azt is beláttuk, hogy az LP feladat rendszere megoldható és a célfüggvénye felülről korlátos, ezért a dualitástétel valóban alkalmazható. Továbbá mivel minden változó nemnegatív értékűsége ki van kötve a feladatban, ezért a dualitástétel második alakját használjuk:

$$\mu = \min\{y\mathbf{1} : yQ \geq w, y \geq 0\}. \tag{$**$}$$

Itt a duális változókat tartalmazó y sorvektor elemei Q sorainak felelnek meg – amik viszont a G csúcsaival vannak indexelve. Ezért az y sorvektort felfoghatjuk úgy, hogy az G minden v csúcsához egy nemnegatív $c(v)$ értéket rendel; más szóval, ha a v csúcs a Q i-edik sorának felel meg, akkor $c(v) = y_i$. Mit mond ekkor az $yQ \geq w$ egyenlőtlenségrendszer? Mivel Q minden oszlopában csak két nemnulla érték van, mégpedig az oszlopnak megfelelő e él végpontjainak megfelelő két sorban álló két 1-es, ezért $yQ \geq w$ jelentése a $c(v)$ értékekkel kifejezve a következő:

$$c(a) + c(b) \geq w(e) \text{ minden } e = \{a, b\} \text{ él esetén.}$$

Ebben feltételrendszerben felismerhetjük a címkézés korábban tanult definícióját, aminek a maximális összsúlyú teljes párosítás feladatra tanult Egerváry-algoritmusban volt meghatározó szerepe. Ha ezt a megfigyelést még kiegészítjük azzal, hogy a $(**)$ feladat $y\mathbf{1}$ célfüggvénye nem más, mint az összes duális változó – vagyis az összes $c(v)$ érték – összege, akkor a dualitástétel állításából végül is az alábbi tételt kapjuk.

Tétel. (Egerváry Jenő, 1931)
Legyen adott a $G = (A, B; E)$ páros gráf és a $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény a G élein. Ekkor G-ben egy w-re nézve maximális összsúlyú párosítás összsúlya megegyezik a címkék $\sum_{v \in A \cup B} c(v)$ összegével egy olyan címkézésben, amiben a címkék összege minimális az összes, nemnegatív értékű címkézések között.

A maximális összsúlyú teljes párosításra korábban tanult Egerváry-algoritmus kapcsán megmutattuk, hogy páros gráfban bármely teljes párosítás összsúlya legföljebb akkora, mint tetszőleges címkézésben a címkék összege (feltéve, hogy a gráfban van teljes párosítás). Az algoritmus kimenete pedig egy teljes párosításból és egy vele azonos összegű címkézésből állt. Így az algoritmusból egyben egy, a fentihez nagyon hasonló tétel is következik – ami két lényeges ponton tér el a fentitől: egyrészt maximális összsúlyú *teljes* párosításra vonatkozik (és nem bármilyen párosításra), másrészt nem köti ki a címkék nemnegativitását, hanem tetszőleges, előjelkötetlen címkézésekről szól. Egerváry tételének ezt a változatát is könnyen bebizonyíthatnánk a dualitástétel következményeként, ehhez kis mértékben kellene csak módosítani a fenti gondolatmenetet. Másrészt viszont a tétel fenti alakját is be lehetne bizonyítani a tanult algoritmusnak (illetve az annak kapcsán látott, a maximális összsúlyú párosítás feladat maximális összsúlyú teljes párosításra való visszavezetésnek) a segítségével. Ezeknek a részleteit most elhagyjuk.

Ehelyett a téma zárásául a következő lényeges szempontra hívjuk fel a figyelmet. A korábban tanult Egerváry-algoritmus legfőbb segédeszköze épp a címkézés fogalma volt; ezzel lehetett garantálni, hogy a kimenetként kapott teljes párosítás valóban optimális. A fentiekből az derült ki, hogy a címkézés fogalma több, mint egy, az adott konkrét feladatra alkalmazható kiváló segédeszköz: egy sokkal általánosabb fogalomnak, a dualitásnak a speciális esete. Vannak más olyan hasonló, de ennél a példánál akár jóval komplikáltabb problémák is, amiknél a dualitás olyan segédeszközt szolgáltat egy algoritmus tervezéséhez, ami kulcsfontosságú az algoritmus működéséhez. Ekkor tehát, hasonlóan az Egerváry-algoritmus esetéhez, a probléma algoritmikus megoldása végül nem közvetlenül egy LP megoldó algoritmus alkalmazásával történik, hanem a lineáris és egészértékű programozás az elméleti hátteret nyújtja egy ennél akár jóval hatékonyabb algoritmus tervezéséhez.