**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
2024. május 9.

## Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

**1.** A 14 csúcsú $G$ egyszerű gráf egy 6 csúcsú útból és egy 8 csúcsú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával (egy-egy él mentén). Milyen hosszú $G$-ben egy lehető legrövidebb olyan élsorozat, ami $G$ minden élét tartalmazza? (Az élsorozatban tehát $G$ minden élének kell szerepelnie legalább egyszer, de egyes élei akár többször is szerepelhetnek.)

* * * * *

**Első megoldás.** Jelölje $P_6$, illetve $P_8$ a $G$ készítéséhez használt 6, illetve 8 csúcsú utat. (0 pont)
Ekkor $P_6$ végpontjainak a foka $G$-ben 9, $P_6$ többi csúcsának a foka viszont 10 (hiszen $P_6$ csúcsai a $P_6$-on belüli szomszédaikon kívül még szomszédosak $P_8$ mind a 8 csúcsával). Hasonlóan, $P_8$ végpontjainak a foka 7, $P_8$ többi csúcsának a foka pedig 8. (1 pont)
$G$ éleinek a száma pedig 60 (amiből $5 + 7 = 12$ él $P_6$-hoz, illetve $P_8$-hoz tartozik, a többi $6 \cdot 8 = 48$ él pedig a két út csúcsait köti össze). (1 pont)
Mivel 2-nél több páratlan fokú csúcsa van, ezért a tanult tétel szerint $G$-ben nincs Euler-séta. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy $G$-ben nincs olyan 60 élű élsorozat, ami $G$ minden élét tartalmazná; vagyis a legrövidebb ilyen élsorozat hossza legalább 61. (2 pont)
Jelölje $u$, illetve $v$ $P_6$, illetve $P_8$ egyik végpontját és adjunk hozzá $G$-hez egy új $\{u, v\}$ élt. (Ezzel tehát $u$ és $v$ között már két párhuzamos él fut.) (1 pont)
A kapott $G'$ gráfban $u$ és $v$ foka 1-gyel nőtt, így párosra változott. Vagyis $G'$-ben már két kivétellel minden csúcs foka páros. (1 pont)
Igaz továbbá az is, hogy $G'$ összefüggő gráf. Valóban, ha két csúcs $G'$-ben nem szomszédos, akkor $P_6$ és $P_8$ közül ugyanahhoz kell tartozniuk, így nyilván vezet közöttük út (akár $P_6$ vagy $P_8$ mentén, akár a másik út egy tetszőleges csúcsán át). (1 pont)
Így a tanult tétel szerint $G'$ tartalmaz Euler-sétát. (1 pont)
Következik, hogy $G$ tartalmaz 61 hosszúságú olyan élsorozatot, ami $G$ minden élét tartalmazza: ehhez a $G'$-beli Euler-sétát csak annyiban kell módosítani, hogy annak mindkét, $u$ és $v$ közötti élét a $G$-beli egyetlen $\{u, v\}$ élre kell cserélni. (1 pont)
Így a legrövidebb ilyen élsorozat hossza 61.

**Második megoldás.** Annak indoklása, hogy a keresett élsorozat hossza legalább 61, azonos az első megoldásban írttal. (5 pont)
Jelölje $u$, illetve $v$ $P_6$, illetve $P_8$ egyik végpontját és töröljük $G$-ből az $\{u, v\}$ élt. (1 pont)
A kapott $G'$ gráfban $u$ és $v$ foka 1-gyel csökkent, így párosra változott. Vagyis $G'$-ben már két kivétellel minden csúcs foka páros. (1 pont)
Igaz továbbá az is, hogy $G'$ összefüggő gráf. Valóban, $u$ és $v$ között vezet út például a $P_6$, illetve $P_8$-beli szomszédaikon keresztül, amik egymással szomszédosak. Egyébként pedig ha két csúcs $G'$-ben nem szomszédos, akkor $P_6$ és $P_8$ közül ugyanahhoz kell tartozniuk, így nyilván vezet közöttük út (például $P_6$ vagy $P_8$ mentén). (1 pont)
Így a tanult tétel szerint $G'$ tartalmaz Euler-sétát. (1 pont)
Következik, hogy $G$ tartalmaz 61 hosszúságú olyan élsorozatot, ami $G$ minden élét tartalmazza: ehhez a $G'$-beli Euler-sétát csak annyiban kell módosítani, hogy amikor a séta épp (mondjuk) $u$-hoz ér, akkor beszúrjuk kétszer egymás után az $\{u, v\}$ élt – vagyis először $u$-ból $v$-be, majd onnan vissza $u$-ba lépünk; ezután folytatjuk az Euler-séta bejárását. (1 pont)
Így a legrövidebb ilyen élsorozat hossza 61.

**2.** A $G$ irányítatlan, egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. $G$-re lefuttattuk a BFS algoritmust az $a$ csúcsból indítva és az egyes csúcsok előző($v$) mutatóira az alábbiakat kaptuk:

| $v$ | : | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| előző($v$) | : | $*$ | $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $c$ | $f$ |

a) Mennyi táv($g$), vagyis a $g$ csúcs távolsága $a$-tól?
b) Mennyi az $a$ csúcs foka $G$-ben?
c) Mennyi a $g$ csúcs foka $G$-ben, ha azt is tudjuk, hogy a BFS algoritmus a csúcsokat ábécé szerinti növekvő sorrendben járta be (vagyis a csúcsok ebben a sorrendben váltak aktív csúccsá)?

* * * * *

a) Az előző($g$) $= f$, előző($f$) $= c$, előző($c$) $= a$ sorozat mentén lépegetve jutunk vissza $a$-hoz,(1 pont) így a BFS eljárás működéséből következően az $a, c, f, g$ csúcsokat sorban érintő út egy legrövidebb út $a$-ból $g$-be. Ezért táv($g$) $= 3$. (1 pont)
b) Mivel az eljárás $a$-ból indul, ezért az $a$ minden szomszédját $a$-ból éri el. (1 pont)
Így $a$ foka azoknak a $v$ csúcsoknak a száma, amikre előző($v$) $= a$, vagyis 2. (1 pont)
c) $g$-nek szomszédja $f$, hiszen előző($g$) $= f$. (1 pont)
Mivel előző($g$) (és táv($g$)) csak az $f$ aktívvá válásakor kapott értéket (1 pont)
és az $a, b, c, d, e$ csúcsok mindegyike ennél korábban volt aktív, (1 pont)
ezért $g$ nem lehet szomszédos az $a, b, c, d, e$ csúcsok egyikével sem. (1 pont)
(Valóban, ha $v$ volna az első olyan csúcs $a, b, c, d, e$ közül, amelyikkel $g$ szomszédos, akkor $v$ aktívvá válásakor az eljárás a $\{v, g\}$ élt is vizsgálná és így előző($g$) $= v$ volna.) (0 pont)
Következik, hogy $g$ foka 1. (2 pont)
Ha egy megoldó felrajzolja a bejáráshoz tartozó BFS-fát és erről minden további indoklás nélkül leolvassa $a$ és $g$ fokát, az a b) és c) részekért járó, összesen 8 pontból csak a c) feladat pontozásában szereplő első 1 pontot szerezheti meg (annak ellenére is, hogy az eredményei helyesek), hiszen a feladat nem a csúcsok BFS-fabeli fokát kérdezte, hanem a $G$-beli fokát. További részpontszám csak akkor adható, ha a megoldásból (legalább részben) kiderül, hogy $a$-nak és $g$-nek nem lehetnek további szomszédai $G$-ben.

**3.** A 12 csúcsú $G$ egyszerű gráf egy 5 csúcsú körből és egy 7 csúcsú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával (egy-egy él mentén). Határozzuk meg $G$-nek a $\chi(G)$ kromatikus számát és az $\omega(G)$ klikkszámát.

* * * * *

$G$ csúcsai megszínezhetők 6 színnel. Valóban, az 5 és a 7 csúcsú körrel is megtehetjük, hogy az egyik csúcsát kiszínezzük egy színnel, majd ettől a csúcstól indulva és a kör mentén lépegetve két további színt használunk felváltva. Ha a két kör csúcsaira használt színek között nincs közös, akkor ezzel valóban egy helyes színezést kaptunk 6 színnel. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy $G$ csúcsai nem színezhetők meg 5 színnel. (0 pont)
Mivel az egyik kör minden csúcsa szomszédos a másik kör minden csúcsával, ezért ha az egyik kör

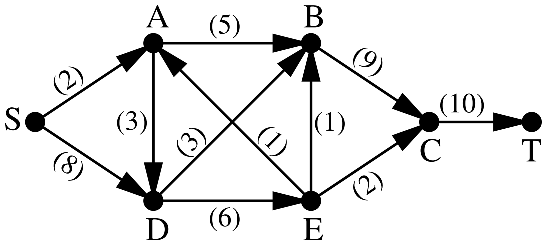
valamelyik csúcsát mondjuk tób színűre festjük, akkor a másik kör egyik csúcsa sem lehet tób. Vagyis a két kör színezéséhez használt színek halmaza diszjunkt. (2 pont)
A két kör színezéséhez külön-külön legalább három-három szín kell. Ez következik egyrészt abból a tanult tételből, hogy a páratlan kört tartalmazó gráfok nem párosak, így a kromatikus számuk legalább 3; de közvetlenül is könnyen látható: ha két színnel próbálnánk színezni bármelyik kör csúcsait, akkor ezt a két színt a kör mentén haladva felváltva kellene használni, de így az utolsó csúcshoz érve annak a két szomszédja már különböző színű volna, így ez a csúcs nem kaphatna színt. (1 pont)
Ezzel tehát beláttuk, hogy $G$ nem színezhető meg 5 színnel, 6-tal viszont igen. Így $\chi(G) = 6$. (1 pont)
Ha mindkét körben kiválasztunk két-két, a kör mentén szomszédos csúcsot, akkor ezek együtt 4 csúcsú klikket alkotnak $G$-ben. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy $G$-ben nem létezik 5 csúcsú klikk. (0 pont)
Válasszunk ki ugyanis $G$ csúcsai közül tetszőlegesen 5-öt. Ekkor a választott csúcsok közül legalább 3 ugyanahhoz a körhöz fog tartozni (a $G$ készítéséhez használt 5 és 7 csúcsú körök közül). (1 pont)
E között a legalább 3 csúcs között azonban kell legyen kettő, amik nem szomszédosak, mert sem az 5 csúcsú, sem a 7 csúcsú körön belül nyilván nem található három csúcsú klikk. (1 pont)
Így a kiválasztott 5 csúcs nem alkot klikket. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $\omega(G) = 4$. (1 pont)

**4.** A (14 csúcsú és 21 élű) $G$ gráf egy hétszög alapú hasáb élhálója; vagyis $G$ csúcsai azonosak a hasáb csúcsaival és két csúcs akkor szomszédos $G$-ben (egyetlen él mentén), ha a hasáb egyik éle összeköti őket. Határozzuk meg $G$-nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

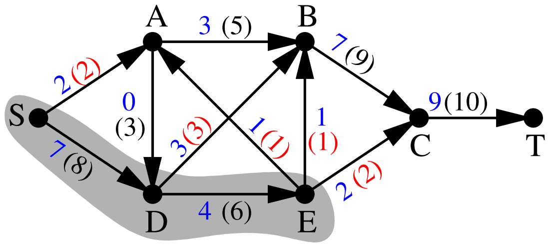
$G$-ben minden csúcs foka 3, így a $G$-beli maximális fokszám is $\Delta(G) = 3$. (1 pont)
Így a tanultak szerint $\chi_e(G) \geq 3$ (2 pont)
(ugyanis $G$ nem tartalmaz hurokélt). (0 pont)
Megmutatjuk, hogy $G$ élei megszínezhetők 3 színnel. (0 pont)
Színezzük meg a hasáb alaplapjának az éleit három színnel például úgy, hogy a hétszög egyik élét pirosra festjük és a többit felváltva kékre és zöldre. Most a hasáb fedőlapjának az éleit is színezzük meg ugyanezzel a három színnel úgy, hogy minden él színe legyen azonos az alaplap vele párhuzamos élével. (Vagyis az alaplap éleinek a színezését átmásoljuk a fedőlapra elforgatás nélkül, egyszerű eltolással.) Végül a hasáb minden oldaléle is kap egy színt ugyanebből a háromból: azt az egyet, amilyen színű él még nem illeszkedik az alaplapnak arra a csúcsára, amire a szóban forgó oldalél illeszkedik. Ekkor ugyanennek az oldalélnek a fedőlapon lévő végpontjára is három különböző színű él illeszkedik, mert a fedőlapon lévő két, rá illeszkedő él színe azonos az alaplapon lévő két megfelelő él színével. Így a kapott színezés helyes. (6 pont)
Mivel tehát $G$ élei megszínezhetők 3 színnel, de kevesebbel nem, ezért $\chi_e(G) = 3$. (1 pont)
Természetesen $G$ egy három színnel való élszínezését a fentihez hasonló szöveg helyett rajzzal is meg lehet adni. Ez akkor értékelhető, ha a rajz egyrészt valóban a feladatbeli gráfot ábrázolja, másrészt félreérthetetlenül és világosan kiderül minden egyes él színe (akár a rajz színezéséből, akár az él mellé írt jelből), harmadrészt az ábrázolt élszínezés helyes. Azonban a helyes élszínezésért járó 6 pont tovább nem osztható: ha a felsorolt feltételek bármelyike sérül, akkor ebből a 6 pontból részpontszám nem adható. Nem adható emellett részpontszám a Vizing-tétel alkalmazásáért (vagyis a $\chi_e(G) \leq 4$ állításért és annak indoklásáért) sem, mert ennek a feladat megoldásához nincs hozzáadott értéke.

**5.** a) Adjunk meg egy minimális kapacitású vágást a jobbra látható hálózatban (amiben $S$ a termelő, $T$ a fogyasztó).
b) Változtassuk most meg a $C$-ből $T$-be mutató él kapacitását 10-ről $p$-re, ahol $p$ paraméter. Adjunk meg minden $p \geq 0$ értékre egy minimális kapacitású vágást a kapott hálózatban.




* * * * *

a) Az $\{S, D, E\}$ vágás kapacitása 9 (az alábbi ábrán pirossal jelölt kapacitások összege). (2 pont)
Az ábrán látható folyam értéke (az $S$-ből kilépő éleken a folyamértékek összege) szintén 9. (2 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora, mint tetszőleges vágás kapacitása, ezért a 9 értékű folyam bizonyítja, hogy a 9 kapacitású vágás minimális. (2 pont)




b) Az a) feladat megoldása változtatás nélkül működik minden $p \geq 9$ esetben: az ott megadott folyam ugyanúgy bizonyítja, hogy a 9 kapacitású $\{S, D, E\}$ vágás minimális. (1 pont)
Vizsgáljuk ezért a $0 \leq p < 9$ esetet. Ekkor az $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás kapacitása $p$ (hiszen egyedül a $(C, T)$ él kapacitása járul hozzá), ami tehát kisebb 9-nél. (1 pont)
Legyen $X$ tetszőleges vágás. Ha $C \in X$, akkor a $(C, T)$ él kilép $X$-ből, így $X$ kapacitása $c(X) \geq p$. Ha viszont $C \notin X$, akkor a $(C, T)$ él nem lép ki $X$-ből, így $c(X)$ értéke nem függ $p$-től. Ekkor az a) feladat megoldásából tudjuk, hogy $c(X) \geq 9 > p$. (1 pont)
Következik, hogy a $0 \leq p < 9$ esetben az $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás minimális kapacitású. (1 pont)
Az a) kérdés pontozásában az utolsó 2 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott vágás minimális kapacitású. Ez történhet máshogyan is, mint a fenti megoldásban: például a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy az eljárás leállása után $S$-ből elérhető csúcsok halmaza a tanultak szerint minimális kapacitású vágás; azonban üres frázisok (mint például: „a Ford-Fulkerson tétel miatt") nem érnek pontot. A b) kérdésben a $0 \leq p < 9$ esetben az $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás kapacitásának minimális volta indokolható a következőképpen is: szorozzuk meg az a) feladatban megadott folyam minden egyes élen felvett értékét $\frac{p}{9}$-cel. Az így kapott értékek szintén folyamot alkotnak, mert sem a kapacitás feltételek, sem a folyammegmaradási feltételek teljesülését nem sérti a beszorzás (az előbbiek esetében $\frac{p}{9} < 1$ miatt). Az így kapott folyam értéke $p$, ami tehát az a) feladatban írttal analóg módon igazolja a $p$ kapacitású $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás minimális voltát.

**6*.** Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq \varrho(G)$ teljesül minden izolált pontot nem tartalmazó $G$ egyszerű gráfra. ($\chi(G)$ a $G$ kromatikus számát, $\overline{G}$ a $G$ komplementerét, $\varrho(G)$ pedig a $G$-beli lefogó élek minimális számát jelöli.)

* * * * *

**Első megoldás.** Gallai tétele szerint $\nu(G) + \varrho(G) = n$, ahol $n$ a gráf csúcsainak száma. (0 pont)
Így a bizonyítandó állítás ekvivalens ezzel: $\chi(\overline{G}) \leq n - \nu(G)$. (2 pont)
Legyen $M$ egy maximális párosítás $G$-ben (vagyis $|M| = \nu(G)$) és készítsük el $G$ csúcsainak a következő színezését: az $M$-beli élek végpontjait fessük azonos színűre, de mindegyik $M$-beli él esetén egy-egy másik színt használjunk. Végül az $M$ által nem fedett csúcsok mind kapjanak egy-egy önálló színt (vagyis ezeknek a színe legyen különböző mindegyik más csúcs színétől). (2 pont)
Ezzel $\overline{G}$ helyes színezését adtuk meg. Valóban, csak az $M$-beli élek végpontjai kaptak azonos színt, de mivel $M$ élei $E(\overline{G})$-ből hiányoznak, ezért $\overline{G}$-ben szomszédos csúcsok nem kaptak azonos színt. (2 pont)
Másrészt a színezéshez felhasznált színek száma $n - \nu(G)$, mert $M$ éleinek végpontjaira $\nu(G)$ színt használtunk, a maradék $n - 2 \cdot \nu(G)$ csúcsra pedig egyet-egyet és ez összesen valóban $(n - 2 \cdot \nu(G)) + \nu(G) = n - \nu(G)$ szín. (2 pont)
Mivel $\overline{G}$ csúcsait megszíneztük $n - \nu(G)$ színnel, ebből $\chi(\overline{G}) \leq n - \nu(G) = \varrho(G)$ valóban következik. (2 pont)

**Második megoldás.** Legyen $Z$ egy minimális lefogó élhalmaz $G$-ben (vagyis $|Z| = \varrho(G)$) és készítsük el $G$ csúcsainak a következő színezését. Számozzuk meg $Z$ éleit 1-től $\varrho(G)$-ig tetszőlegesen, majd minden $v$ csúcshoz válasszunk egy tetszőleges, rá illeszkedő $Z$-beli élt és fessük $v$-t az annyiadik színre, mint a választott él sorszáma. (3 pont)
Mivel $Z$ lefogó élhalmaz, ezért minden csúcsnak adtunk színt (mert van rá illeszkedő, $Z$-beli él). (1 pont)
Ha most az $u$ és $v$ (tetszőleges) csúcsok azonos színt kaptak, mondjuk a $j$-ediket, akkor őket összeköti a $j$-edik sorszámú $Z$-beli $e_j$ él. (2 pont)
Mivel $e_j$ hiányzik $E(\overline{G})$-ből, ezért $u$ és $v$ nem szomszédosak $\overline{G}$-ben. Ezzel megmutattuk, hogy a megadott színezés helyes színezése $\overline{G}$ csúcsainak. (2 pont)
Mivel $\overline{G}$ csúcsait megszíneztük $\varrho(G)$ színnel, ebből $\chi(\overline{G}) \leq \varrho(G)$ valóban következik. (2 pont)