Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2022. május 5.

1. Hány olyan 6 elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, ami nem tartalmazza részhalmazként az $\{1, 2, 3\}$ halmazt? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

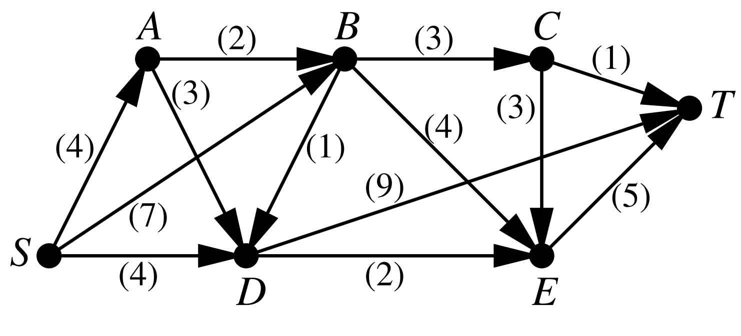
2. Létezik-e olyan lépéssorozat a (8×8-as) sakktáblán egy lóval, amire teljesül, hogy minden, egymástól (egyetlen) lólépés távolságra lévő mezőpár esetén a lépéssorozat során pontosan egyszer lépünk e közül a két mező közül az egyikről a másikra? (Így például a lépéssorozat során a lónak pontosan egyszer kellene vagy a D4-ről az E6-ra, vagy az E6-ról a D4-re lépnie, mert ez a két mező egy lólépésnyire van egymástól. A sakk szabályai szerint a ló egy lépése abból áll, hogy először függőleges vagy vízszintes irányba mozog két mezőt, majd erre az irányra merőlegesen mozog még egy mezőt.)

3. A 25 csúcsú G gráf csúcsai legyenek a síknak azok a vektorai, amiknek mindkét koordinátája 0 és 4 közötti egész szám (beleértve a 0-t és a 4-et is). (Ugyanez képletben: $V(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 4, x, y \in \mathbb{Z}\}$.) Az $\underline{u}, \underline{v} \in V(G)$, $\underline{u} \neq \underline{v}$ vektorok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha az $\underline{u} + \underline{v}$ vektor mindkét koordinátája (szigorúan) kisebb 5-nél. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

4. A BFS algoritmus (irányított gráfokra vonatkozó változata) az alábbi (a következő feladathoz is tartozó) ábrán látható irányított gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, A, T, $\square$, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket $\square$ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát. (Ebben a feladatban az éleken szereplő számoknak nincs szerepe.)

5. a) Határozzuk meg a jobbra látható hálózatban az $X = \{S, D, E\}$ vágás kapacitását.

b) Adjunk meg a hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be (és mutassuk meg róla, hogy valóban maximális).



6. A $G = (A, B; E)$ páros gráf mindkét pontosztálya 10 csúcsú (vagyis $|A| = |B| = 10$). A gráf minden e éléhez tartozik egy adott $w(e) \geq 0$ nemnegatív súly. Tudjuk, hogy a gráf minden v csúcsára teljesül, hogy a v-re illeszkedő élek összsúlya legalább 8 és legföljebb 9 (és így v-re illeszkedik legalább egy él). Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
2022.05.24.

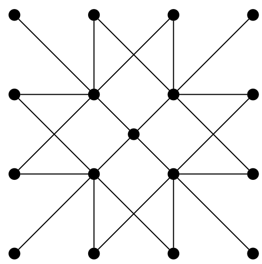
1. Piréziában a rendszámok 5 karakterből állnak, az angol abc 26 betűjét és a 10 számjegyet lehet használni. Ezen kívül csak két szabály van: az első és az utolsó helyen nem állhat számjegy és semelyik két egymás melletti karakter sem lehet számjegy. Hány rendszám készíthető Piréziában? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

2. Egy 10 csúcsú fában van két 5 fokú csúcs. Igazoljuk, hogy ez a két csúcs szomszédos.

3. A G gráfra teljesül, hogy bármely csúcsát törölve, a kapott gráfnak van Hamilton-köre. Igaz-e, hogy G-nek biztosan van Hamilton-útja?

4. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az egész számok 1-től 20-ig, két különböző csúcs között vezessen él pontosan akkor, ha a megfelelő számok szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

5. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó élhalmazt az alábbi gráfban.



6*. Létezik-e olyan 10 csúcsú, 45 élű (G, s, t, c) hálózat, melyben minden kapacitás egész és bármely két $s - t$ vágás kapacitása különböző?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód,Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, a pontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Díjköteles pótlás feladatok
2022. június 1.

1. Piréziában lecserélték a rendszámokat, mindegyik 8 karakterből áll és a karakterek mindegyike az angol ábécé 26 betűjének vagy a 10 számjegynek az egyike. Ezen kívül csak egyetlen szabály vonatkozik a rendszámokra: mindegyik pontosan 3 számjegyet tartalmaz. Hány rendszám készíthető most Piréziában? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

2. Az $r = 1, 2, \ldots, 8$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 16 csúcsú, r-reguláris, egyszerű páros gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.)

3. Egy 9 csúcsú egyszerű gráfnak 21 éle van. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.

4. A $G = (A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy maximális független ponthalmazt G-ben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Egy 5 csúcsú teljes gráf egy Hamilton-körének az éleit helyettesítsük két-két párhuzamos éllel. Határozzuk meg az így kapott (5 csúcsú és 15 élű) G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

6*. a) Legyen G páros gráf és M egy maximális méretű párosítás G-ben. Igaz-e mindig, hogy M megkapható a páros gráfokban maximális méretű párosítás keresésére szolgáló javítóutas algoritmus egy helyes futásának az eredményeképpen, ha az algoritmust az üres párosítástól indítjuk?

b) Legyen G irányított gráf, $s, t \in V(G)$ különböző csúcsok, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kapacitásfüggvény, valamint legyen f egy maximális értékű folyam a (G, s, t, c) hálózatban. Igaz-e mindig, hogy f megkapható a maximális folyam keresésére szolgáló javítóutas algoritmus egy helyes futásának az eredményeképpen, ha az algoritmust az azonosan nulla folyamtól indítjuk?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2022. május 5.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldásának főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, ami egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amiből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Hány olyan 6 elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, ami nem tartalmazza részhalmazként az $\{1, 2, 3\}$ halmazt? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

* * * * *

Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ összes 6 elemű részhalmazainak a száma $\binom{10}{6}$ (az $\binom{n}{k}$ definíciója szerint), (2 pont)
aminek az értéke a tanultak szerint $\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{6!} = 210$. (2 pont)
Ezek közül az $\{1, 2, 3\}$ halmazt tartalmazó részhalmazok száma $\binom{7}{3}$, mert ez a szám nyilván egyenlő a $\{4, 5, \ldots, 10\}$ halmaz 3 elemű részhalmazainak a számával (hiszen az 1, 2, 3 elemeken kívül további 3 elemet kell választani a részhalmazba a $4, \ldots, 10$ számok közül). (2 pont)
Ennek az értéke pedig $\frac{7\cdot6\cdot5}{3!} = 35$. (1 pont)
Így az $\{1, 2, 3\}$ halmazt nem tartalmazó részhalmazok száma $210 - 35 = 175$. (3 pont)
$\binom{10}{6}$ és $\binom{7}{3}$ konkrét értékét a feladat szövege szerint nem kell kiszámolni, a megfelelő részpontszámok a kiszámolás módját mutató felírásokért járnak. Ennek megfelelően a végeredményt is elég ezek különbségeként megadni. Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért.

2. Létezik-e olyan lépéssorozat a (8×8-as) sakktáblán egy lóval, amire teljesül, hogy minden, egymástól (egyetlen) lólépés távolságra lévő mezőpár esetén a lépéssorozat során pontosan egyszer lépünk e közül a két mező közül az egyikről a másikra? (Így például a lépéssorozat során a lónak pontosan egyszer kellene vagy a D4-ről az E6-ra, vagy az E6-ról a D4-re lépnie, mert ez a két mező egy lólépésnyire van egymástól. A sakk szabályai szerint a ló egy lépése abból áll, hogy először függőleges vagy vízszintes irányba mozog két mezőt, majd erre az irányra merőlegesen mozog még egy mezőt.)

* * * * *

A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha a megfelelő mezők egy lólépésre vannak egymástól. Ekkor a feladat által írt lépéssorozat létezése azt jelenti, hogy G-ben van Euler-séta. (4 pont)
Ha a v csúcs az egyik olyan mezőt jelöli, ami a sakktábla valamelyik sarkában álló mezővel élszomszédos, akkor v foka 3. Valóban, például az A2 mező (ami az A1 sarokkal élszomszédos) G-beli szomszédai a C1, a C3 és a B5 mezők. (2 pont)
Mivel az ilyen mezők száma nyolc, ezért G-nek kettőnél több páratlan fokú csúcsa van. (2 pont)
Így a tanultak szerint G-ben nincs Euler-séta, ezért a feladatban írt lépéssorozat sem létezik.(2 pont)
G összes többi (tehát nem sarokmezővel élszomszédos) csúcsának a foka páros, de ennek a ténynek nincs jelentősége a megoldás szempontjából. Ha egy megoldó nem találja meg a 3 fokú csúcsokat és ezért arra a (téves) következtetésre jut, hogy a gráfban van Euler-séta, akkor egyrészt megkaphatja az Euler-sétával való kapcsolatért járó első 4 pontot, másrészt további legföljebb 2 pontot akkor, ha (meggyőzően) érvel G összefüggősége mellett és így helyesen alkalmazza a megfelelő tételt.

3. A 25 csúcsú G gráf csúcsai legyenek a síknak azok a vektorai, amiknek mindkét koordinátája 0 és 4 közötti egész szám (beleértve a 0-t és a 4-et is). (Ugyanez képletben: $V(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 4, x, y \in \mathbb{Z}\}$.) Az $\underline{u}, \underline{v} \in V(G)$, $\underline{u} \neq \underline{v}$ vektorok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha az $\underline{u} + \underline{v}$ vektor mindkét koordinátája (szigorúan) kisebb 5-nél. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

* * * * *

G-ben 9 csúcsú klikket alkotnak azok a vektorok, amiknek mindkét koordinátája legföljebb 2. Valóban, két ilyen vektor összegének mindkét koordinátája nyilván kisebb 5-nél. (2 pont)
Így $\omega(G) \geq 9$. (1 pont)
Színezzük ki a fenti klikk csúcsait 9 különböző színnel. (1 pont)
Legyen e közül a 9 csúcs közül az $(0, 2)$ színe piros. Ekkor színezhetjük pirosra az összes olyan vektort, amiknek a második koordinátája legalább 3; valóban, így bármely két, pirosra színezett vektor összegének a második koordinátája legalább 5, így ezek közül egyik sem szomszédos. (2 pont)
Hasonlóan, ha $(2, 0)$ színe kék, akkor színezzük kékre az összes olyan vektort, amiknek az első koordinátája legalább 3 és amiket korábban még nem színeztünk pirosra. Ekkor bármely két kék vektor összegének az első koordinátája legalább 5, így ezek között sincsenek szomszédosak. (1 pont)
Mivel ezzel G helyes színezését adtuk meg 9 színnel, ezért $\chi(G) \leq 9$. (1 pont)
A fentiekből és a tanult $\omega(G) \leq \chi(G)$ állításból $9 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq 9$, amiből $\chi(G) = 9$. (2 pont)

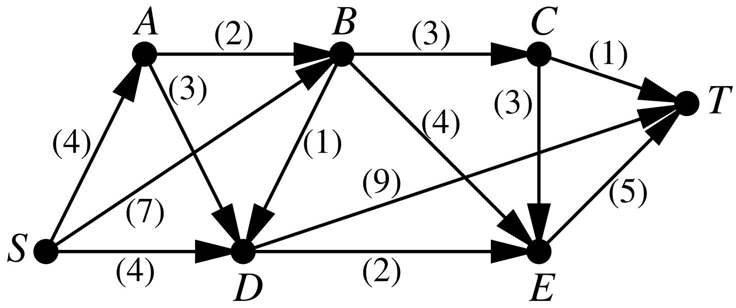
4. A BFS algoritmus (irányított gráfokra vonatkozó változata) az alábbi (a következő feladathoz is tartozó) ábrán látható irányított gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, A, T, □, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát. (Ebben a feladatban az éleken szereplő számoknak nincs szerepe.)

* * * * *

Mivel az eljárás S után az abból egy élen elérhető csúcsokat sorolja föl, ezért a második és a harmadik helyen B és D áll valamilyen sorrendben. (1 pont)
Mivel azonban B, D és A után az ezek közül elsőnek felsorolt csúcsból egy élen elérhető (és korábban fel nem sorolt) csúcsoknak kell következnie, ezért a második helyen D kell álljon, hiszen B-ből T-be nem vezet él. (2 pont)
Így A után a D-ből egy élen elérhető (és korábban még be nem járt) csúcsok, vagyis T és E felsorolása kell következzen. (2 pont)
Ebből már kiderült a teljes sorozat, hiszen az utolsó helyre a megmaradó C csúcsnak kell kerülnie: S, D, B, A, T, E, C. (2 pont)
A fentiekből az is kiderült, hogy az eljárás a D, B és A csúcsokat S-ből, a T és E csúcsokat pedig D-ből éri el. Az utolsónak bejárt C csúcsot viszont nyilván B-ből. Így a BFS-fa élei: (S, D), (S, B), (S, A), (D, T), (D, E), (B, C). (3 pont)

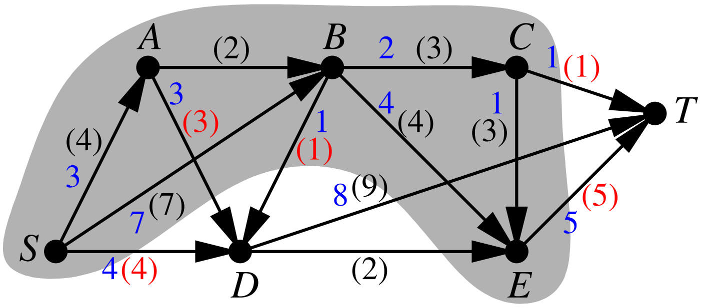
5. a) Határozzuk meg a jobbra látható hálózatban az $X = \{S, D, E\}$ vágás kapacitását.

b) Adjunk meg a hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be (és mutassuk meg róla, hogy valóban maximális).



* * * * *

Az $X = \{S, D, E\}$ halmazból kilépő élek: (S, A), (S, B), (D, T) és (E, T); ezeknek a kapacitása sorra 4, 7, 9 és 5. Így az X vágás kapacitása $4 + 7 + 9 + 5 = 25$. (2 pont)
Az alábbi ábrán látható folyam értéke (az S-ből kilépő éleken a folyamértékek összege) 14. (2 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható $\{S, A, B, C, E\}$ vágás kapacitása (a pirossal jelölt kapacitások összege) szintén 14. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora, mint tetszőleges vágás kapacitása, ezért a 14 kapacitású vágás bizonyítja, hogy a 14 értékű folyam maximális. (3 pont)



Az utolsó 3 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott folyam maximális. Ez persze történhet máshogy is, mint a fenti megoldásban (például a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy a tanultak szerint az maximális folyamot talál, illetve annak a leírásával, hogy az utolsó segédgráfban mely pontok érhetők el S-ből), de üres frázisok (mint például: „a Ford-Fulkerson tétel miatt”) nem érnek pontot.

6. A $G = (A, B; E)$ páros gráf mindkét pontosztálya 10 csúcsú (vagyis $|A| = |B| = 10$). A gráf minden e éléhez tartozik egy adott $w(e) \geq 0$ nemnegatív súly. Tudjuk, hogy a gráf minden v csúcsára teljesül, hogy a v-re illeszkedő élek összsúlya legalább 8 és legföljebb 9 (és így v-re illeszkedik legalább egy él). Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

* * * * *

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Ekkor az X és $N(X)$ közötti élek összsúlya legalább $8 \cdot |X|$, mert minden $x \in X$ csúcsra illeszkedő élek összsúlya legalább 8 (és ezek az élek mind $N(X)$-be érkeznek). (1 pont)
Így az $N(X)$-be érkező összes él összsúlya is legalább $8 \cdot |X|$, mert az $N(X)$-be X-en kívülről érkező élek összsúlya nemnegatív. (1 pont)
Másrészt az $N(X)$-be érkező élek összsúlya legföljebb $9 \cdot |N(X)|$, mert minden $y \in N(X)$ csúcsra illeszkedő élek összsúlya legföljebb 9. (1 pont)
Ezekből tehát $8 \cdot |X| \leq 9 \cdot |N(X)|$, vagyis $|N(X)| \geq \frac{8}{9}|X|$. (1 pont)
Következik, hogy ha $|X| \leq 8$, akkor $|N(X)| \geq |X|$ (mert $|X| \leq 8$ esetén $\frac{8}{9}|X| > |X| - 1$). (2 pont)
Tegyük most fel, hogy $|X| = 9$ és legyen az X-be nem tartozó egyetlen A-beli csúcs z. Ha most $|N(X)| \leq 8$ volna, akkor az $N(X)$-be nem tartozó, legalább két csúcs csak z-vel lehetne szomszédos. Ez azonban lehetetlen, mert így a z-be érkező élek összsúlya legalább $2 \cdot 8 = 16$ volna. Így $|N(X)| \geq |X|$ teljesül $|X| = 9$ esetén is. (1 pont)
Végül ha $|X| = 10$, vagyis $X = A$, akkor $N(X) = B$ (és így $|N(X)| = 10$). Valóban, különben B-ben kellene legyen izolált csúcs, ami a feladat szövege szerint lehetetlen. (1 pont)
Megmutattuk tehát, hogy $|N(X)| \geq |X|$ minden $X \subseteq A$ esetén teljesül. Mivel emellett $|A| = |B| = 10$ is igaz, ezért a tanult (Hall vagy Frobenius) tétel szerint G-ben valóban van teljes párosítás. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
pontozási útmutató
2022. május 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Piréziában a rendszámok 5 karakterből állnak, az angol abc 26 betűjét és a 10 számjegyet lehet használni. Ezen kívül csak két szabály van: az első és az utolsó helyen nem állhat számjegy és semelyik két egymás melletti karakter sem lehet számjegy. Hány rendszám készíthető Piréziában? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Első megoldás. Foglalkozzunk először a 3 középső karakterrel. Ezek közt csak két számjegy lehet és az is csak akkor, ha a két számjegy a 2. és a 4. pozícióban van (ellenkező esetben lenne két szomszédos számjegy). (1 pont)
Három esetet kell tehát megkülönböztetnünk: amikor 0, 1, illetve 2 számjegy van a középső 3 karakter között. (1 pont)
0 számjegy 26^3-féleképp fordulhat elő, mert az első karakter 26-féle lehet, majd mind a 26 kezdést 26-féleképp folytathatjuk, és az így kapott 26^2-féle esetet 26-féleképp fejezhetjük be (indoklás gyanánt hivatkozhatunk arra is, hogy ez az ismétléses variáció tipikus esete). (1 pont)

1 számjegy $3 \cdot 10 \cdot 26^2$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegy helye 3-féle lehet, majd az imént látotthoz hasonló döntéseket kell hoznunk: a számjegy 10-féle, a betűk 26-félék lehetnek. (2 pont)

2 számjegy $10^2 \cdot 26$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegyek helye ekkor rögzített. (2 pont)

Mivel a 3 eset közül pontosan az egyik fordul elő, (1 pont)

ez összesen $26^3 + 3 \cdot 10 \cdot 26^2 + 10^2 \cdot 26 = 26 \cdot (26 \cdot 26 + 30 \cdot 26 + 100)$ lehetőség. (1 pont)

A rendszámok számát ebből (a korábban látott indoklás miatt) kétszeri 26-tal szorzással kapjuk (hiszen az első és az utolsó karakter is 26-féle lehet), az tehát $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot (26 \cdot 26 + 30 \cdot 26 + 100)$. (1 pont)

Második megoldás. A karakterek közt csak két számjegy lehet és az is csak akkor, ha a két számjegy a 2. és a 4. pozícióban van (ellenkező esetben lenne két szomszédos számjegy vagy a szélső karakterek valamelyike számjegy lenne). (2 pont)

Három esetet kell tehát megkülönböztetnünk: amikor 0, 1, illetve 2 számjegy van a rendszámban. (1 pont)

0 számjegy 26^5-féleképp fordulhat elő, mert az első karakter 26-féle lehet, majd mind a 26 kezdést 26-féleképp folytathatjuk, az így kapott 26^2-féle esetet 26-féleképp folytathatjuk, s.í.t. (indoklás gyanánt hivatkozhatunk arra is, hogy ez az ismétléses variáció tipikus esete). (1 pont)

1 számjegy $3 \cdot 10 \cdot 26^4$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegy helye 3-féle lehet (hiszen nem lehet szélen), majd az imént látotthoz hasonló döntéseket kell hoznunk: a számjegy 10-féle, a betűk 26-félék lehetnek. (2 pont)

2 számjegy $10^2 \cdot 26^3$-féleképp fordulhat elő, mert a számjegyek helye ekkor rögzített. (2 pont)

Mivel a 3 eset közül pontosan az egyik fordul elő, (1 pont)

ez összesen $26^5 + 3 \cdot 10 \cdot 26^4 + 10^2 \cdot 26^3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot (26 \cdot 26 + 30 \cdot 26 + 100)$. (1 pont)

Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a hatványok használatáért.

2. Egy 10 csúcsú fában van két 5 fokú csúcs. Igazoljuk, hogy ez a két csúcs szomszédos.

* * * * *

Első megoldás. A tanultak szerint n csúcsú fának $n-1$ éle van, így a kérdéses fa 9 élű. (2 pont)

Ha a két 5 fokú csúcs nem lenne szomszédos, (2 pont)

akkor összesen 10 (különböző) él vezetne ki belőlük, (5 pont)

ami lehetetlen, így a két csúcs csakugyan szomszédos kell legyen. (1 pont)

Második megoldás. Legyen a fa leveleinek (vagyis 1 fokú csúcsainak) száma k, a két 5 fokú csúcstól különböző nem levelek száma ekkor $10 - k - 2$. (1 pont)

A fokszámok összege ekkor legalább $2 \cdot 5 + k + 2(10 - k - 2) = 26 - k$. (2 pont)

A fokszámok összegéről ugyanakkor tudjuk, hogy a fa élszámának kétszerese, vagyis a tanultak szerint (10 csúcsú fának 9 éle van) 18. (2 pont)

Így $26 - k \leq 18$, (1 pont)

vagyis $k \geq 8$. Mivel k nem lehet nagyobb 8-nál (hiszen csak 10 csúcs van, melyek közül legalább 2 nem levél), $k = 8$. (1 pont)

Ha a két 5 fokú csúcs nem lenne szomszédos, akkor tehát csak levelek lennének a szomszédaik, (1 pont)

így a gráf nem lenne összefüggő, ami lehetetlen. (Azzal is érvelhetünk, hogy ekkor a gráfnak 12 csúcsa lenne, hiszen az 5 fokú csúcsok 1 fokú szomszédai ekkor mind különbözők lennének). (2 pont)

3. A G gráfra teljesül, hogy bármely csúcsát törölve, a kapott gráfnak van Hamilton-köre. Igaz-e, hogy G-nek biztosan van Hamilton-útja?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

G-nek nincs izolált pontja, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis az izolált ponttól különböző csúcsok bármelyikét törölve, a kapott gráfnak nem lenne Hamilton-köre. (2 pont)
Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa. A v törlésével kapott gráfnak a feladat feltétele szerint van Hamilton-köre, egy ilyet jelöljünk H-val. (1 pont)
Mivel v nem izolált pont, létezik egy w szomszédja G-ben. (2 pont)
Hagyjuk el a H körből a w-re illeszkedő két él egyikét, a kapott utat jelöljük P-vel. (2 pont)
Ha most a P utat megtoldjuk a $\{v, w\}$ éllel, akkor G egy Hamilton-útját kapjuk, az állítás tehát igaz. (2 pont)

Persze az is igaz, hogy G összefüggő (sőt, könnyű belátni, hogy 3-szorosan összefüggő), nem csak az, hogy nincs izolált pontja, de a bizonyítás során elég ez utóbbit kihasználni. Nem igaz viszont, hogy G-nek biztosan van Hamilton-köre is, a legkisebb ellenpélda erre a Petersen-gráf. A feladat feltételének eleget tevő, de Hamilton-körrel nem rendelkező gráfokat hypohamiltonian gráfoknak nevezik és a vizsgálatuknak komoly irodalma van.

Megjegyzés. A feladat egy picit pontatlanul lett kitűzve, nem követeltük meg ugyanis, hogy a gráf egyszerű (vagy legalább hurokélmentes) legyen, így szigorúan véve az állítás nem igaz: egy két csúcsból és a csúcsokra illeszkedő egy-egy hurokélből álló gráf teljesíti a feltételt, de nincs Hamilton-útja. Aki erre a tényre mutat rá, az természetesen maximális pontszámot kap. (Érdemes megfigyelni, hogy a fenti bizonyításban hol kell kihasználni, hogy a gráf egyszerű.)

4. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az egész számok 1-től 20-ig, két különböző csúcs között vezessen él pontosan akkor, ha a megfelelő számok szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

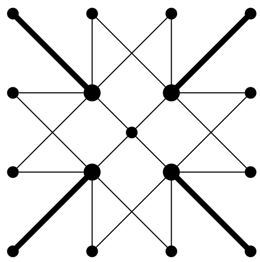
A $2, 5, 10, 20$ csúcsok klikket alkotnak a gráfban, hiszen bármelyik kettő szorzata osztható 10-zel, (2 pont)
a kromatikus szám tehát legalább 4. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy a gráf színezhető 4 színnel, vagyis a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)
Színezzük a $2, 5, 10, 20$ csúcsokat rendre a piros, kék, zöld, sárga színekkel, ezt a színezést terjesztjük ki a gráf összes csúcsára. (1 pont)
A páratlan számokat színezzük kékre, (1 pont)
a páros 5-tel nem oszthatókat pedig pirosra, ezzel minden hátralévő csúcsot megszíneztünk. (1 pont)
Ez a színezés valóban jó lesz: zöld és sárga csúcsból csak egy van, a kékek mind páratlanok, így semelyik kettőnek a szorzata sem lehet 10-zel osztható, a piros csúcsok pedig nem oszthatók 5-tel, így szintén teljesül, hogy semelyik kettő szorzata sem lehet 10-zel oszható. (3 pont)

A 10 és 20 csúcsok minden más csúccsal össze vannak kötve, de ezért a megállapításért még ne adjunk pontot. Ha azonban valaki rámutat, hogy emiatt ez a két csúcs saját színt kell, hogy kapjon, akkor adjunk 1 pontot (amennyiben a szerző ezzel nem lépi túl a 10 pontot).

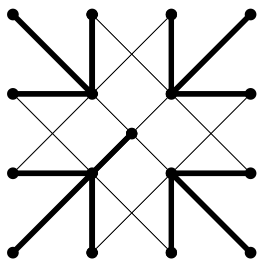
5. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó élhalmazt az alábbi gráfban.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az alábbi ábrán a vastagított élek 4 élű párosítást, (1 pont)
a nagyobb méretű csúcsok pedig 4 elemű lefogó ponthalmazt alkotnak. (1 pont)



Megmutatjuk, hogy a megadott párosítás maximális. Az előadásról tudjuk, hogy bármely G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$ teljesül. (1 pont)
A 4 élű párosítás igazolja, hogy $\nu(G) \geq 4$, (1 pont)
a 4 csúcsú lefogó ponthalmaz pedig igazolja, hogy $\tau(G) \leq 4$. (1 pont)
Így $4 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 4$, ami csak úgy teljesülhet, ha mindenütt egyenlőség áll, (1 pont)
$\nu(G) = 4$ pedig igazolja a párosításunk maximalitását. (1 pont)
Az alábbi ábrán a vastagított élek 13 élű lefogó élhalmazt alkotnak. (1 pont)



Megmutatjuk, hogy ez minimális lefogó élhalmaz. Gallai tétele szerint $\varrho(G)+\nu(G) = |V(G)| = 17$. (1 pont)
Mivel tudjuk, hogy $\nu(G) = 4$, innen $\varrho(G) = 13$, ami igazolja a kérdéses lefogó élhalmaz minimalitását. (1 pont)

Aki a fenti megoldást úgy írja le, hogy a lefogó ponthalmaza valójában nem lefogó, az nem kaphatja meg a második, harmadik, ötödik, hatodik és hetedik részpontszámot, kivéve ha teljesen egyértelmű, hogy nem elvi hibáról van szó (vagyis az illető tisztában van a lefogó ponthalmaz definíciójával), mely esetben a harmadik és az ötödik részpontszám megadható. Aki a lefogó élhalmazt adja meg úgy, hogy az valójában nem lefogó, az nem kaphatja meg a nyolcadik és a tizedik részpontot és a kilencediket is csak akkor, ha egyértelmű, hogy tisztában van a lefogó élhalmaz definíciójával.

6*. Létezik-e olyan 10 csúcsú, 45 élű (G, s, t, c) hálózat, melyben minden kapacitás egész és bármely két $s - t$ vágás kapacitása különböző?

* * * * *

Létezik ilyen hálózat. (0 pont)
Legyen egy irányított él G bármely két csúcsa között pontosan az egyik irányban, (1 pont)
az s-re illeszkedő élek mutassanak ki s-ből. Ekkor bármely két különböző $s - t$ vágásra igaz, hogy a belőlük kimutató élek halmaza különböző, (1 pont)
mert s minden $s - t$ vágásban benne van, így a belőle induló élek közül pontosan azok mennek ki egy X $s - t$ vágásból, melyek végpontjai nincsenek X-ben. (2 pont)

Számozzuk most meg az összes élet 0-tól 44-ig és az i. él kapacitása legyen 2^i. (3 pont)
Ekkor bármely élhalmaz összkapacitása egy 45 jegyű kettes számrendszerbeli szám lesz, így különböző élhalmazokhoz különböző számok tartoznak, (2 pont)
így bármely két $s-t$ vágás kapacitása különböző kell legyen. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Díjköteles pótlás feladatok — pontozási útmutató
2022. június 1.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldásának főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, ami egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amiből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Piréziában lecserélték a rendszámokat, mindegyik 8 karakterből áll és a karakterek mindegyike az angol ábécé 26 betűjének vagy a 10 számjegynek az egyike. Ezen kívül csak egyetlen szabály vonatkozik a rendszámokra: mindegyik pontosan 3 számjegyet tartalmaz. Hány rendszám készíthető most Piréziában? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Először válasszuk ki a 8 karakter közül azt a 3-at, ahová a számjegyek kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{8}{3} =$ (1 pont)
$= \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56.$ (2 pont)
Ezután a kijelölt három helyen a számjegyeket 10^3-féleképp tölthetjük ki, (1 pont)
mert az első 10-féle lehet, mind a 10 kezdést 10-féleképp folytathatjuk, az így kapott 10^2-féle esetet pedig 10-féleképp fejezhetjük be (vagy az ismétléses variációnál tanultakra hivatkozással). (1 pont)
Hasonlóan, az öt megmaradó helyen a betűket 26^5-féleképpen tölthetjük ki. (1 pont)
A rendszámok száma így végül is $56 \cdot 10^3 \cdot 26^5$, (2 pont)
mert a $\binom{8}{3}$ választás mindegyikéhez 10^3-féleképp választhatunk számjegyeket és minden így kapott esethez 26^5-féleképp választhatunk betűket. (2 pont)
$\binom{8}{3}$ konkrét értékét a feladat szövege szerint nem kell kiszámolni, a megfelelő részpontszám a kiszámolás módját mutató felírásért jár. Ennek megfelelően a végeredményt is elég ezzel megadni. Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a hatvány jelölés használatáért.

2. Az $r = 1, 2, \ldots, 8$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 16 csúcsú, r-reguláris, egyszerű páros gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.)

* * * * *

A tanultak szerint olyan gráfban, melyben van páratlan fokú csúcs, nem lehet Euler-körséta, így az $r = 1, 3, 5, 7$ értékek nem megfelelők. (1 pont)
Az $r = 2$ és $r = 4$ értékekre sem igaz az állítás, mert létezik olyan 16 csúcsú, 2-reguláris, illetve 4-reguláris egyszerű, páros gráf, melynek egynél több (élt tartalmazó) komponense van, így nincs benne Euler-körséta. (1 pont)
(Ne vonjunk le pontot azért, ha a megoldás nem tér ki arra, hogy a komponensek tartalmaznak élt.)
Az előbbire példa (mások mellett) két 8 csúcsú kör uniójaként kapott gráf, (1 pont)
az utóbbira pedig két $K_{4,4}$ teljes páros gráf uniójaként előálló gráf. (A $K_{4,4}$ gráf mindkét pontosztályában 4 csúcs van és minden olyan csúcspár szomszédos, aminek a tagjai különböző pontosztályba tartoznak.) (2 pont)
Az $r = 6$ és $r = 8$ esetekben viszont a gráf összefüggő kell legyen. Valóban, ha a két pontosztályt A és B jelöli és $a \in A$ tetszőleges csúcs, akkor a-val egy komponensbe kell tartozzon annak a legalább 6 B-beli szomszédja, valamint ezek közül egy tetszőlegesnek az a-tól különböző, legalább 5 A-beli szomszédja is. Így minden komponens legalább 12 csúcsú, vagyis a 16 csúcsú G gráfnak csak egy komponense lehet. (3 pont)
Mivel az olyan összefüggő gráfoknak pedig, melyeknek nincs páratlan fokú csúcsa, a tanultak szerint van Euler-körsétája, ezért az $r = 6$ és $r = 8$ esetekben az állítás igaz. (2 pont)
Az $r = 8$ esetben a gráf összefüggőségét rövidebben, például a Dirac-tételre hivatkozással is lehet indokolni. Ha egy megoldó csak az $r = 8$ esetre mutatja meg az összefüggőséget, akkor a megfelelő 3 pontból 1-et kapjon meg.

3. Egy 9 csúcsú egyszerű gráfnak 21 éle van. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.

* * * * *

Jelölje a gráfot G és tegyük fel, hogy G-ben nincs páratlan kör. (0 pont)
Ekkor a tanultak szerint G páros gráf kell legyen. (3 pont)
Ha G kisebbik pontosztályában x csúcs van, a nagyobbikban pedig $9 - x$, akkor az éleinek a száma legföljebb $x \cdot (9 - x)$ (3 pont)
(mert a gráf egyszerű). (0 pont)
A szóba jövő $x = 0, 1, 2, 3, 4$ értékekre tehát G élszáma legföljebb 0, 8, 14, 18, illetve 20. (1 pont)
G-nek tehát mindenképp legföljebb 20 éle van, ami kevesebb a feladatban szereplő 21 élnél. Így G-nek csakugyan kell legyen páratlan köre. (3 pont)

4. A $G = (A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy maximális független ponthalmazt G-ben.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Például $M = \Big\{\{a_1, b_6\}, \{a_2, b_5\}, \{a_3, b_9\}, \{a_4, b_2\}, \{a_5, b_3\}, \{a_7, b_4\}\Big\}$ 6 élű párosítás G-ben (hiszen az élei közül semelyik kettőnek nincs közös végpontja). (1 pont)
Az $X = \{a_2, a_5, a_7, b_2, b_6, b_9\}$ halmaz lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető: a megfelelő sorok és oszlopok együtt minden 1-est tartalmaznak). (3 pont)
M létezése bizonyítja a $\nu(G) \geq 6$ állítást, X létezése pedig a $\tau(G) \leq 6$ állítást. (1+1 pont)
Így a tanult $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás miatt G-re $6 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 6$. Ebből $\nu(G) = 6$, vagyis a megadott M párosítás maximális. (1 pont)
Ugyanebből $\tau(G) = 6$ is adódik, így $\alpha(G) = |V(G)| - \tau(G) = 17 - 6 = 11$ a tanult (Gallairól elnevezett) tétel szerint. (1 pont)
11 csúcsú független ponthalmazt alkotnak az (X lefogó ponthalmazba nem tartozó) $\{a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, b_1, b_3, b_4, b_5, b_7, b_8\}$ csúcsok, mert ezek közül semelyik kettő nem szomszédos. Így ez maximális független ponthalmaz G-ben. (2 pont)
A $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni, ami szerint páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$. A $\nu(G) = 6$ állítás indoklásáért járó összesen 3 pont viszont csak annak jár, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt” nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. Azonban a párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását is lehet az algoritmusra alapozni: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben X az A-beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető B-beliekből és az alternáló úton el nem érhető A-beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

5. Egy 5 csúcsú teljes gráf egy Hamilton-körének az éleit helyettesítsük két-két párhuzamos éllel. Határozzuk meg az így kapott (5 csúcsú és 15 élű) G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy G élei megszínezhetők 8 színnel. (0 pont)
Válasszunk először a megduplázott élpárok mindegyikéből egy-egy élt. Ezek együttesen egy 5 hosszú kört alkotnak, így nyilván megszínezhetők 3 színnel. Ha most ezeket az éleket elhagyjuk, akkor egy 5 csúcsú teljes gráfot kapunk. Mivel ebben minden pont foka 4 (és ez már egyszerű gráf), ezért Vizing tétele szerint az élei megszínezhetők további 5 színnel. Így G éleit valóban megszíneztük összesen $5 + 3 = 8$ színnel. (4 pont)
Vegyük most G-nek egy tetszőleges, helyes élszínezését. Ebben minden színt legföljebb két él kaphat meg, mert három, azonosan színezett élnek összesen már 6 végpontja kellene legyen. (2 pont)
Mivel G-nek összesen 15 éle van és minden színt csak kétszer használhatunk, ezért legalább 8 színre van szükség egy helyes élszínezéséhez. (3 pont)
A fentiek szerint tehát $\chi_e(G) = 8$. (1 pont)
A fenti pontozás szerinti első 4 pont természetesen jár azért, ha a megoldó megadja (lerajzolja) G egy helyes élszínezését 8 színnel. Mivel G nem egyszerű gráf, ezért rá a Vizing-tétel nem alkalmazható, így egy 8 színnel való élszínezés létezése ezen a módon nem indokolható, az ilyen próbálkozásokért nem jár pont (de persze ettől függetlenül a 7 színnel való élszínezés lehetetlenségéért járó részpontok megadhatók).

6*. a) Legyen G páros gráf és M egy maximális méretű párosítás G-ben. Igaz-e mindig, hogy M megkapható a páros gráfokban maximális méretű párosítás keresésére szolgáló javítóutas algoritmus egy helyes futásának az eredményeképpen, ha az algoritmust az üres párosítástól indítjuk?

b) Legyen G irányított gráf, $s, t \in V(G)$ különböző csúcsok, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kapacitásfüggvény, valamint legyen f egy maximális értékű folyam a (G, s, t, c) hálózatban. Igaz-e mindig, hogy f megkapható a maximális folyam keresésére szolgáló javítóutas algoritmus egy helyes futásának az eredményeképpen, ha az algoritmust az azonosan nulla folyamtól indítjuk?

* * * * *

a) Legyen $M = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Ekkor e_1 (a végpontjaival) 1 élű javítóutat alkot az üres párosításra nézve és minden $2 \le i \le k$ esetén e_i (a végpontjaival) ugyancsak 1 élű javítóutat alkot az $M_i = \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ párosításra nézve. (3 pont)
Így sorra ezeket a javítóutakat választva az algoritmus egy helyes futásából M-et kapjuk, vagyis a válasz igen. (1 pont)

b) Itt a válasz már nemleges, ezt egy ellenpéldával mutatjuk meg. (0 pont)
Legyen $V(G) = \{s, t, v\}$ és álljon G élhalmaza az $e_1 = (s, v)$, $e_2 = (v, t)$, $e_3 = (v, t)$ élekből (vagyis e_2 és e_3 párhuzamos élek). Legyen továbbá minden e élre $c(e) = 1$, valamint $f(e_1) = 1$ és $f(e_2) = f(e_3) = \frac{1}{2}$. (2 pont)
Ekkor f valóban folyam (mert megfelel a folyam definíciójának) és az értéke $m_f = 1$. (1 pont)
Ráadásul f nyilván maximális folyam, mert az $X = \{s\}$ vágás kapacitása 1, így G-ben nem létezhet 1-nél nagyobb értékű folyam. (1 pont)
Azonban a javítóutas algoritmus nem adhatja f-et. Valóban, mivel minden él kapacitása egész és az eljárást az azonosan nulla folyamtól indítjuk, ezért a tanultak szerint az olyan folyammal áll meg, amiben minden élen a folyamérték egész. (2 pont)
A b) feladatban természetesen sok más ellenpélda is adható. (A legkisebb ellenpélda az, amire $V(G) = \{s, t\}$ és G-nek egyetlen e éle van, egy s-re vagy t-re illeszkedő hurokél, amire $f(e) = c(e) = 1$. Ez az ellenpélda azonban kicsit „sportszerűtlen”, ezért fentebb egy másikat írtunk le.) Létezik olyan ellenpélda is, amiben f megkapható volna az algoritmus futásából, de csak akkor, ha a segédgráfban nem mindig a legrövidebb javítóutak egyikét választanánk; mivel a tanultak szerint az eljárás során mindig egy legrövidebb javítóutat kell választani, ezért az ilyen példák is teljes értékűek és maximális pontot érnek.