Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. április 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A 12 csúcsú G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{\text{január}, \text{február}, \ldots, \text{december}\}$ (vagyis G csúcsai a hónapok nevei). Két csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a két megfelelő hónap nevének utolsó betűje különböző vagy a két hónap napban mért hossza különböző (vagy esetleg mindkettő). (Így például G-ben a január szomszédos a februárral, a márciussal és az áprilissal is, de a decemberrel már nem.) Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát. (A februárt tekintsük 28 naposnak.)

* * * * *

G-ben a február minden más csúccsal szomszédos (hiszen a hossza minden más hónaptól különböző). Mivel a többi hónap mindegyikének hossza 30 vagy 31 nap, az utolsó betűje pedig R vagy S, ezért a maradék 11 hónap 4 csoportra osztható: R végű 30 naposak, R végű 31 naposak, S végű 30 naposak és S végű 31 naposak. Mind a 4 csoport nemüres, lehetséges példák sorra a szeptember, az október, az április és a május. (2 pont)

Mivel az egy csoportba tartozó csúcsok nem szomszédosak G-ben, ezért G-nek egy helyes 5 színnel való színezését kapjuk, ha ennek a 4 csoportnak 4 külön színt biztosítunk, a februárt pedig egy ötödik színnel színezzük meg. (3 pont)

G tartalmaz 5 pontú klikket is: ilyet kapunk, ha a február mellé mind a 4 említett csoportból egy-egy csúcsot választunk. Így például $\{\text{február}, \text{április}, \text{május}, \text{szeptember}, \text{október}\}$ klikk G-ben. (3 pont)

Az 5 pontú klikk bizonyítja, hogy G 4 színnel nem megszínezhető, így $\chi(G) = 5$. (2 pont)

2. A 8 csúcsú teljes gráfnak hagyjuk el 4, egy csúcsra illeszkedő élét. Intervallumgráf-e a kapott gráf?

* * * * *

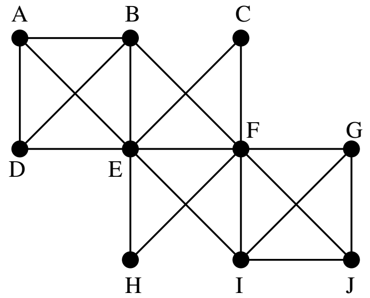
Legyen v_1 az a közös csúcs, amelyre a négy elhagyott él illeszkedett, az elhagyott élek másik végpontjai legyenek sorra v_2 v_3, v_4 és v_5, a gráf további három csúcsa pedig v_6, v_7 és v_8.

Feleltessük meg a v_1 csúcsnak a számegyenesen az $[1; 2]$ intervallumot, a v_2 v_3, v_4 és v_5 csúcsoknak a $[3; 4]$ intervallumot (vagyis annak négy példányát), a v_6, v_7 és v_8 csúcsoknak pedig az $[1; 4]$ intervallumot (annak egy-egy példányát). (4 pont)

Mivel a felsorolt intervallumok közül az $[1; 2]$ és a $[3; 4]$ nem metsző, de az $[1; 4]$ a többit metszi (valamint a $[3; 4]$ és az $[1; 4]$ különböző példányai közül bármely kettő nyilván metsző), ezért a megadott 8 intervallum által reprezentált intervallumgráf épp a feladatban definiált gráf. (4 pont)

Így a válasz igen, a szóban forgó gráf intervallumgráf. (2 pont)

3. Használjuk Tutte tételét annak igazolására, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás. (Tutte tétele arra vonatkozó szükséges és elégséges feltételt ad, hogy egy tetszőleges gráf tartalmaz-e teljes párosítást.)



* * * * *

Hagyjuk el a gráfból az E és az F csúcsokat (az éleikkel együtt). Ekkor a maradék gráf a C és H izolált csúcsokból, valamint az A, B és D, illetve a G, I és J csúcsok alkotta három csúcsú teljes gráfokból áll. (4 pont)
Ez azt jelenti, hogy a 2 csúcs elhagyása után kapott gráfnak 4 páratlan komponense van, (3 pont)
így Tutte tételének a feltétele sérül, vagyis az eredeti gráfban nincs teljes párosítás. (3 pont)
Mivel ez a feladat kimondottan a Tutte-tétel alkalmazását kéri a megoldótól, ezért (rész)pontszámot is csak az ebbe az irányba mutató lépésekért lehet adni. A Tutte-tétel alkalmazása nélkül, közvetlenül is könnyű belátni, hogy a feladatbeli gráfban nincs teljes párosítás – azonban egy ilyen gondolatmenet önmagában nem ér pontot. Ha például egy megoldó olyasmit ír, hogy a C és H csúcsok párjai csak E és F lehetnek, de ezután már az ABD és GIJ háromszögekből is legföljebb csak egy-egy él vehető be a párosításba, akkor ez interpretálható úgy is, hogy a megoldó (tudtán kívül) a feladatbeli gráfra vonatkozóan „újra felfedezte” a Tutte-tétel feltételét; mégis, ha a megoldásból nem derül ki egyértelműen, hogy ennek a ténynek a megoldó is tudatában van, akkor ez a gondolatmenet nem ér pontot. Más a helyzet természetesen, ha a megoldó felismeri a Tutte-feltétel sérülését, majd (a feladat megoldásának szempontjából egyébként szükségtelenül) az adott gráfra vonatkozóan elmagyarázza, hogy ez miért zárja ki a teljes párosítás létezését; egy ilyen megoldás nyilván maximális pontszámot érhet. Ha egy megoldó nem tesz említést a keletkező komponensek páratlanságáról és csak annyit mutat meg, hogy két pont elhagyása után 4 komponens keletkezik, az ezért a fenti pontozás szerinti első 4 pontot kaphatja meg.

4. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

Mivel G egyszerű és benne a maximális fokszám 3, ezért Vizing tétele miatt $\chi_e(G) \leq 4$. (2 pont)
Tegyük fel indirekt, hogy G élei megszínezhetők 3 színnel és a (2 fokú) v csúcsra illeszkedő egyik él színe legyen a piros. Mivel minden 3 fokú u csúcs esetében az u-ra illeszkedő 3 élen mindhárom szín meg kell jelenjen, ezért minden csúcsra pontosan egy piros él kell illeszkedjen. (2 pont)
Így a piros élek teljes párosítást alkotnak G-ben. (2 pont)
Másrészt viszont ismert, hogy a G-beli fokszámok összege páros (az élszám kétszerese), így a páratlan fokú csúcsok száma páros. Ezért a 3 fokú csúcsok száma páros, így G összes csúcsainak száma (v-vel együtt) páratlan. (2 pont)
Mivel páratlan csúcsszámú gráfban nyilván nem létezhet teljes párosítás, ellentmondásra jutottunk. Így G élei nem színezhetők meg 3 színnel, vagyis $\chi_e(G) = 4$. (2 pont)
A 3 színnel való élszínezés lehetetlensége megmutatható a következőképpen is. Legyen a G csúcsainak száma $2k+1$ – hiszen a fenti megoldásból kiderült, hogy az páratlan. Ekkor a G-beli fokok összege $(2k) \cdot 3 + 2 = 6k + 2$, így a G élszáma $3k + 1$. G egy tetszőleges élszínezésében minden szín legföljebb k-szor használható, hiszen az azonos színű élek párosítást alkotnak G-ben és egy $k+1$ élű párosításhoz már $2k+2$ csúcs kellene. Ezért 3 színnel legföljebb $3k$ él volna megszínezhető, ami tehát kevesebb az összes élek számánál.

5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{101}\}$. Minden $1 \leq i \leq 101$ és $1 \leq j \leq 101$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha $i \cdot j$ páros. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának, valamit $\varrho(G)$, a lefogó élek minimális számának értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

* * * * *

G-ben könnyen megadható egy 100 élű független élhalmaz (avagy párosítás): például $M = \big\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_3\}, \ldots, \{a_{100}, b_{101}\}\big\}$. (1 pont)

Az $X = \{a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{100}, b_2, b_4, b_6, \ldots, b_{100}\}$ halmaz lefogó ponthalmaz G-ben, hiszen $i \cdot j$ (akkor és) csak akkor páros, ha i és j közül legalább az egyik páros. (3 pont)

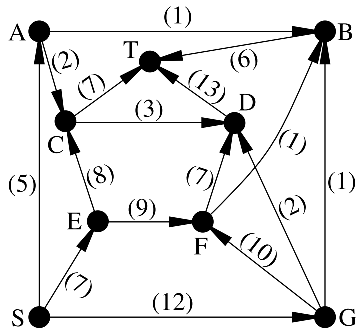
Mivel $|X| = 100$, ezért a tanultak szerint G-ben nem lehet 100-nál nagyobb méretű független élhalmaz. Így $\nu(G) = 100$ (és a fenti M párosítás maximális). (2 pont)

Gallai tétele szerint $\nu(G)$ és $\varrho(G)$ összege a csúcsok száma, így $\varrho(G) = 102$. (1 pont)

A tanultak szerint 102 elemű lefogó élhalmazt kapunk, ha egy 100 élű (vagyis maximális) párosításhoz hozzávesszünk két további élt úgy, hogy ezzel a párosítás által le nem fogott két csúcs is lefogottá váljon. Így például a fenti M párosítás az a_{101} és b_1 csúcsokat hagyta fedetlenül, ezért $M \cup \big\{\{a_{101}, b_2\}, \{a_2, b_1\}\big\}$ minimális lefogó élhalmaz. (3 pont)

Egy 100 pontú lefogó ponthalmaz megadásán kívül más lehetőség is van arra, hogy megmutassuk, hogy egy 100 élű párosítás maximális. Lehet például hivatkozni arra, hogy mivel az $X = \{a_1, a_3, \ldots, a_{101}\}$ halmazra $N(X) = \{b_2, b_4, \ldots, b_{100}\}$, ezért a Hall-feltétel sérül, így G-ben nem lehet A-t lefedő, vagyis 101 élű párosítás. De azt sem nehéz megmutatni, hogy egy megadott 100 élű párosításra nézve G-ben már nincs javító út, így a tanult tétel szerint az maximális.

6. Adjunk meg a jobbra látható hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be).



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 21. (3 pont)

Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, A, F, G\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, A, F, G\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 21. (4 pont)

Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, ezért a 21 értékű vágás bizonyítja, hogy a 21 értékű folyam maximális. (3 pont)

Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak.) A folyam maximalitása mellett lehet annak megmutatásával is érvelni, hogy a 21 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.