Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. március 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód létezik, ami legföljebb két számjegyet tartalmaz?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

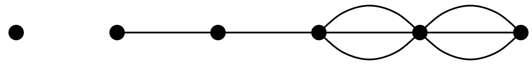
* * * * *

Három eset lehetséges: egy keresett Neptun-kód tartalmazhat 0, 1 vagy 2 számjegyet.
Ha 0 számjegyet tartalmaz, vagyis minden tagja betű, akkor a lehetőségek száma (például az ismétléses variációnál tanultak szerint) 26^6. (1 pont)
Ha 1 számjegyet tartalmaz, akkor ennek a helyét 6-féleképpen választhatjuk meg, majd magát a számjegyet 10-féleképpen. (1 pont)
Végül a fennmaradó 5 helyet 26^5-féleképpen tölthetjük fel betűkkel (hasonlóan a fenti esethez).(1 pont)
Így az 1 számjegyet tartalmazó kódok száma $6 \cdot 10 \cdot 26^5$ (hiszen az elsőként mondott 6 eset mindegyikét 10-féleképp folytathattuk és az így kapott $6 \cdot 10$ eset mindegyikében 26^5 további lehetőség volt).(1 pont)
Ha a kód 2 számjegyet tartalmaz, akkor ezeknek a helye $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$-féleképp választható ki.(1 pont)
A számjegyek helyének ismeretében, hasonlóan az 1 számjegyet tartalmazó kódoknál írtakhoz, $10^2 \cdot 26^4$-féleképpen tölthetjük ki a kódot. (1 pont)
Tehát a 2 számjegyet tartalmazó kódok száma $15 \cdot 10^2 \cdot 26^4$. (1 pont)
Így a legföljebb 2 számjegyet tartalmazó Neptun-kódok száma $26^6 + 6 \cdot 10 \cdot 26^5 + 15 \cdot 10^2 \cdot 26^4$.(3 pont)
Nem jár pontlevonás azért ha a megoldó a hatványok értékét nem fejti ki szorzás formájában.

2. A 6 csúcsú G gráf hurokélt nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy G bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van G-nek? (Azaz: milyen k egészre teljesül, hogy létezik a feltételeknek megfelelő k élű gráf, de k-nál kevesebb élű már nem?)

* * * * *

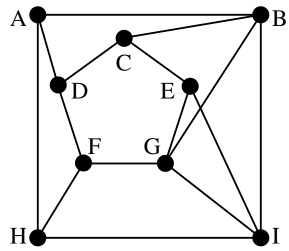
Mivel minden fokszám különböző, ezért G-ben a fokok összege legalább $0+1+2+3+4+5=15$ kell legyen. (1 pont)
Azonban a fokok összege az élszám kétszerese, így ez páros. Ezért a fokszámösszeg legalább 16, (2 pont)
amiből következően G éleinek száma legalább 8 (a fokszámösszeg fele). (2 pont)
8 élű, ilyen tuljadonságú gráf viszont már létezik, egy példát mutat az alábbi ábra:



(4 pont)

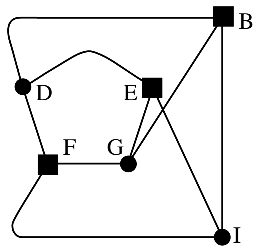
Ezért a keresett minimális élszám a 8. (1 pont)
Ha a megoldó nem talál egy, a feltételeknek megfelelő gráfot, de azt megállapítja, hogy abban a fokszámok (a korábbiakból következően) csak 0, 1, 2, 3, 4 és 6 lehetnek, akkor ezért a gráf konstruálásáért járó 4 pontból 1-et megkaphat.

3. Síkbarajzolható-e a jobbra látható gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



* * * * *

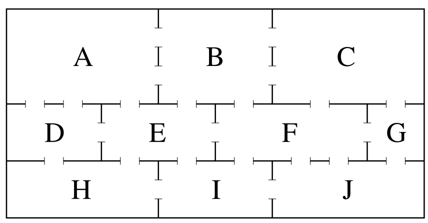
Hagyjuk el a gráfból az $\{A,H\}$, $\{B,C\}$ és a $\{G,I\}$ éleket. (2 pont)
A keletkező gráfban A, C és H foka 2 lesz, az ezekbe menő éleket „olvasszuk össze” egyetlen éllé; az eredményt az alábbi ábra mutatja. (2 pont)



A kapott gráf a $K_{3,3}$, mert a B, E és F csúcsok mindegyike szomszédos a D, G és I csúcsok mindegyikével (és a kapott gráfnak további éle nincs). (2 pont)
Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat gráfjában számos más módon is találhatunk $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, a fenti csak egy a lehetőségek közül. Egy másik például a következő: hagyjuk el az $\{A,B\}$, $\{D,F\}$ és $\{G,I\}$ éleket, majd a 2 fokúvá vált A, D és F csúcsokba menő éleket olvasszuk össze.

A fenti pontozás úgy értendő, hogy 6 pont járhat a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráf kimutatásáért (akkor is, ha az csak egy – pontos és minden részletre kiterjedő – rajz formájában történik) és 4 pont járhat azért, ha a megoldó ebből a helyes következtetést levonja. Ebből a 4 pontból azonban legföljebb 3 megadható akkor is, ha a megoldónak nem sikerült ugyan $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot találni, de a megoldásból egyértelmű, hogy pontosan tudta, mit keres. Erre utalhat például, ha egy egyébként sikertelen próbálkozás hibáját felismeri, vagy ha helyesen megindokolja, hogy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfja miért nem lehet a feladatbeli gráfnak. Természetesen mindez csak arra az esetre vonatkozik, ha a Kuratowski-tétel helyes alkalmazására irányuló szándék a dolgozatból nyilvánvaló, többféleképpen értelmezhető vagy nem világos céllal készült ábrákért nem adunk pontot.

4. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden reggel az A jelű lakosztályából sétára indul a palotában. A fejébe veszi, hogy séta közben minden ajtón pontosan egyszer szeretne átmenni. Ha ez sikerülne neki, a séta végpontját jelölné ki trónteremnek. De mivel sosem sikerül, az udvari bölcs azt tanácsolja, hogy falaztassa be az egyik ajtót. Van-e a palotában olyan ajtó, aminek a befalazása után már létezik a király vágyainak megfelelő séta? Ha igen, melyik szobából lehet a trónterem? (Az ábra a befalazás előtti állapotot mutatja.)



* * * * *

A P gráf csúcsai legyenek a palota szobái és P élei feleljenek meg az ajtóknak. A kérdés az, hogy P-nek van-e olyan éle, amit elhagyva a kapott gráfban lesz (az A csúcsból induló) Euler-út; ha pedig igen, akkor melyik csúcs lehet ennek az Euler-útnak a másik végpontja (vagyis a trónterem)? (3 pont)
A tanult tételből következik, hogy P-ből a keresett él elhagyása után (nulla vagy) kettő kivétellel minden csúcs foka páros kell legyen. (1 pont)
Egy él elhagyása a két végpont fokának a paritását változtatja meg. Mivel jelenleg az A, F, G és H csúcsok foka páratlan és ezek közül csak az F és a G szomszédosak, ezért az elhagyandó él (vagyis a befalazandó ajtó) csak az F és G közötti lehet. (2 pont)
Az $\{F, G\}$ él (ajtó) elhagyása után kapott gráf nyilván összefüggő (1 pont)
és benne csak az A és a H foka páratlan, ezért van benne Euler-út. (1 pont)
Ennek a végpontjai csak a páratlan fokú pontok lehetnek (az Euler-út létezésére tanult feltétel szükségességének indoklása kapcsán tanultak miatt – illetve mert az Euler-út végpontjaitól eltekintve minden csúcs fokának párosnak kell lennie, hiszen az Euler-út bejárása során minden „bejárathoz" tartozik egy „kijárat"). Így a trónterem csak H lehet. (2 pont)
A feladat megoldható a kérdés gráfelméleti átfogalmazása nélkül is, ha az Euler-útról tanultak alkalmazása helyett a konkrét esetben újraalkotjuk a vonatkozó gondolatmenetet. Valóban: a bölcs által javasolt ajtó befalazása után a király lakosztálya és trónterem kivételével minden szobának páros sok ajtaja kell legyen, hiszen ahányszor a király a séta során belép egy szobába, annyiszor ki is kell lépnie. Így érvelve azonban szükségessé válik az A-ból H-ba vezető és (az F és G közöttit kivéve) minden ajtót érintő séta konkrét megadása – hiszen gráfelméleti háttér nélkül nem hivatkozhatunk az ide tartozó tételre. Ha egy megoldó ezt elmulasztja, de ettől eltekintve az imént írthoz hasonló, meggyőző érvelést ír arra, hogy az F és G közötti ajtó, valamit H mint trónterem az egyetlen szóba jövő lehetőség, az ezért legföljebb 7 pontot kaphat. Ha viszont egy megoldó csak konkrét példát ad meg az A-ból H-ba vezető, $\{F, G\}$ elhagyása utáni sétára, de nem zárja ki más lehetőség létezését, az ezért legföljebb 3 pontot kaphat.

5. A G egyszerű, síkbarajzolható gráfban minden pont foka legalább 4 és a pontosan 4 fokú csúcsok száma 5. Mutassuk meg, hogy G-ben nincs Euler-kör.

* * * * *

Indirekt tegyük fel, hogy G-ben van Euler-kör. Ekkor a tanult tétel szerint G-ben minden pont foka páros. (1 pont)
Így az 5 darab 4 fokú csúcson kívül minden más csúcs foka legalább 6 kell legyen. (2 pont)
Ezért G-ben a pontok fokának összege legalább $5 \cdot 4 + (n - 5) \cdot 6 = 6n - 10$ (ahol n a G csúcsainak számát jelöli). (3 pont)
Mivel a fokszámösszeg egyenlő az élszám kétszeresével, ezért G éleinek száma legalább $3n - 5$.(2 pont)
Ez ellentmond annak a tanult tételnek, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfnak legföljebb $3n - 6$ éle lehet. Ez az ellentmondás tehát bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy mivel a megoldásban használt, az egyszerű és síkbarajzolható gráfok élszámára vonatkozó tétel csak a legalább 3 csúcsú gráfokra igaz, ezért egy valóban hiánytalan gondolatmenethez $n \geq 3$ indoklása is hozzátartozna. Ez nyilván igaz, hiszen a 4 fokú pontok létezéséből még $n \geq 5$ is azonnal következik. Ennek ellenére, az $n \geq 3$ indoklásának hiányáért nem vonunk le pontot.

6. A 201 csúcsú G egyszerű gráfban a v csúcs kivételével minden pont foka legalább 101. A v csúcsról csak annyit tudunk, hogy nem izolált pont (vagyis a foka legalább 1). Mutassuk meg, hogy G-ben van Hamilton-út.

* * * * *

Hagyjuk el G-ből a v csúcsot (nyilván az éleivel együtt), a kapott gráfot jelölje G'. (2 pont)
G'-nek 200 csúcsa van és minden pontjának foka legalább 100 (hiszen v elhagyásával a megmaradt pontok foka legföljebb 1-gyel csökkent). (2 pont)
Ezért Dirac tétele miatt G'-ben van egy C Hamilton-kör. (2 pont)
Ebből pedig könnyen következik a feladat állítása: ha v-ből egy tetszőleges w szomszédjára lépünk, majd w-ből indulva bejárjuk a C kört (kivéve annak utolsó, w-be visszavezető élét), akkor épp G egy Hamilton-útját kapjuk. (4 pont)