Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2015. március 19.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Hány olyan 12 hosszúságú betűsorozat készíthető az angol abécé 26 betűjéből, amelyben pontosan 4 darab **X** és 3 darab **Y** betű szerepel?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

* * * * *

Először válasszuk ki a betűsorozat 12 tagja közül azt a 4-et, ahová az **X**-ek kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{12}{4} =$ (1 pont)

$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. (2 pont)

Most a maradék 8 tag közül választjuk ki a 3 **Y** helyét. A lehetőségek száma itt $\binom{8}{3} =$ (2 pont)

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. (1 pont)

Végül a sorozat 5 megmaradt helyére szabadon választhatunk az ábécé maradék 24 betűjéből. Erre nyilván 24^5 lehetőségünk van (hivatkozva az ismétléses variációnál tanultakra – vagy egyszerűen arra, hogy 5-ször egymás után 24 lehetőség közül választunk). (2 pont)
Mivel az először mondott $\binom{12}{4}$ lehetőség mindegyike $\binom{8}{3}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással; majd a kapott $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{3}$ lehetőség mindegyike 24^5-féleképp folytatható a harmadik választással, ezért az összes lehetőségek száma $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{3} \cdot 24^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$. (2 pont)

Nem jár pontlevonás azért ha a megoldó a 24^5 értékét nem fejti ki szorzás formájában. Megjegyezzük, hogy ha a megoldás során először az **Y**, utána az **X** betűk helyét választjuk meg, akkor az eredményt $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot 24^5$ alakban kapjuk meg (analóg gondolatmenettel); ez azonban számértékét tekintve azonos a fentivel. Egy harmadik megoldási lehetőség, ha először azt a 7 helyet választjuk ki, ahová **X** vagy **Y** betűk kerülnek, majd a választott 7 hely közül (például) azt a 4-et, ahová az **X**-ek. Ekkor $\binom{12}{7} \cdot \binom{7}{4} \cdot 24^5$ alakban jön ki ismét csak ugyanaz az eredmény.

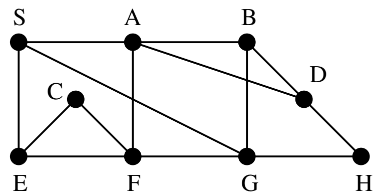
2. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legföljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G-nek?

* * * * *

Legyen a legföljebb 7 fokú csúcsok halmaza A, a legalább 16 fokúaké B. Ekkor tehát $|A| = |B| = 10$. Ha $v \in B$ tetszőleges, akkor a v-ből induló élek közül legföljebb 9 mehet B-beli csúcsba (hiszen G egyszerű), így legalább $d(v) - 9 \geq 7$ élnek A-beli csúcsba kell érkeznie. (2 pont)
Ez minden B-beli csúcsról elmondható, így összesen legalább $10 \cdot 7 = 70$ él megy B-ből A-ba. (2 pont)
Mivel az A-beliek foka legföljebb 7, ezért legföljebb $10 \cdot 7 = 70$ él érkezhet meg A-ba B-ből. (2 pont)
Mindebből következik, hogy A és B között pontosan 70 él megy és minden A-beli pont foka pontosan 7, a B-belieké pontosan 16. (2 pont)
Ezek szerint a G-beli pontok fokainak összege $10 \cdot 7 + 10 \cdot 16 = 230$, a G éleinek száma pedig (a tanultak szerint) ennek a fele, vagyis 115. (2 pont)

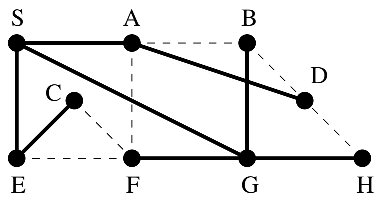
3. a) A BFS algoritmus az alábbi ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, □, H, □, F, C, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet az alábbi gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



* * * * *

a) Az eljárás S után a szomszédait, vagyis A-t, G-t és E-t sorolja föl valamilyen sorrendben. Utánuk viszont az elsőként felsorolt S-szomszéd szomszédai következnek. Mivel H az A, G és E közül csak G-vel szomszédos, ezért S után G kell következzen. (1 pont)
H után G további szomszédai kell álljanak, így először B (majd a megadott F) következik. (1 pont)
Ezek után S másodjára felsorolt szomszédja (még el nem ért) szomszédainak kell állni. Mivel C az A és E közül csak E-vel szomszédos, ezért G után E, majd A kell következzen. (1 pont)
Az utolsó helyen nyilván a még fel nem sorolt D csúcs áll, vagyis a keresett sorozat: S, G, E, A, H, B, F, C, D. (1 pont)
A fentiekből az is majdnem mindenhol kiderült, hogy az eljárás az egyes csúcsokat melyik másik csúcsból éri el. Az egyetlen kivétel a D: ezt nyilván A-ból (mert D nem szomszédos G-vel és E-vel). Így tehát a bejáráshoz tartozó BFS-fa az alábbi (vastagított vonalakkal):



(3 pont)

b) Ha az S-ből indított BFS-algoritmushoz tartozó BFS fának éle az $\{u, v\}$, akkor az eljárás vagy u-ból érte el v-t, vagy fordítva. Mindkét esetben igaz, hogy u és v különböző távolságra van S-től (az utóbb elért csúcs távolsága 1-gyel nagyobb a másikénál). (2 pont)
Mivel D és H egyaránt 2 távolságra van S-től (ez például a BFS a) feladatbeli futtatásából is kiderül), ezért a $\{D, H\}$ nem lehet éle ilyen BFS-fának. (1 pont)

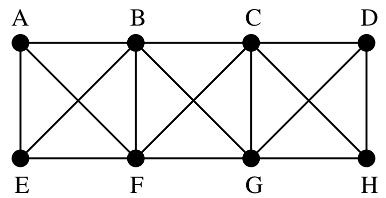
4. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t.

* * * * *

Első megoldás. Állítsuk w értéke szerinti növekvő sorrendbe G éleit úgy, hogy ha G-nek van e-n kívül más $w(e)$ súlyú éle is, akkor a $w(e)$ súlyúak közül e legyen elsőként felsorolva. (3 pont)
A minimális összsúlyú feszítőfa megkeresésére szolgáló Kruskal-algoritmust lefuttathatjuk az éleknek ebből a sorrendjéből kiindulva is (hiszen az algoritmus csak a w szerinti növekvő sorrendet írja elő, az azonos súlyú élek sorrendje közömbös). (2 pont)
Mivel a Kruskal-algoritmus (a tanult tétel szerint) minimális összsúlyú feszítőfát ad, megoldjuk a feladatot, ha megmutatjuk, hogy a kapott F feszítőfa tartalmazza e-t. (1 pont)
Jelölje az e előtt az eljárás által kiválasztott élek halmazát F_0. A Kruskal-algoritmus csak akkor döntene úgy, hogy e-t nem veszi be F élei közé, ha $F_0 \cup \{e\}$ kört tartalmazna. Ez azonban valóban lehetetlen: az élek sorrendjének fenti megválasztása miatt az eljárás a v-re illeszkedő élek közül először foglalkozik e-vel, így az $F_0 \cup \{e\}$ által alkotott részgráfban v foka 1, márpedig egy kör éleinek végpontjai nyilván legalább 2 fokúak lennének. Ezzel tehát az állítást beláttuk. (4 pont)

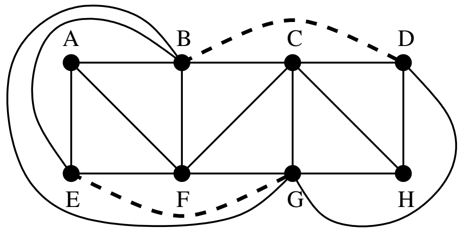
Második megoldás. Legyen F egy tetszőleges, minimális összsúlyú feszítőfa (a w élsúlyozás szerint). Ha F tartalmazza e-t, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel ezért, hogy nem tartalmazza. (1 pont)
Mivel F összefüggő, ezért tartalmaz egy P utat e két végpontja között. Legyen P-nek a v-re illeszkedő (egyetlen) éle f. Hagyjuk ki F-ből f-et és vegyük be helyette e-t; a kapott részgráfot jelölje F'. Állítjuk, hogy F' is egy feszítőfa. (3 pont)
Ha F-hez hozzávesszük e-t, létrejön egy kör (hiszen a P út e-vel körré záródik). Az előadáson tanultak szerint összefüggő gráfból egy kör egy tetszőleges élét elhagyva összefüggő gráfot kapunk. Így F' összefüggő, mert az élhalmazát $E(F) \cup \{e\}$-ből f elhagyásával kaptuk. Továbbá mivel F és F' élszáma azonos, ezért F' körmentes is: ha tartalmazna kört, akkor a „hagyjuk el egy kör egy élét" eljárást a körmentességig folytatva $(n-1)$-nél kisebb élszámú feszítőfát kapnánk (ahol $n = |V(G)|$); ez a tanultak szerint lehetetlen. Mivel F' összefüggő, körmentes és $V(F') = V(G)$, ezért feszítőfa. (3 pont)
Mivel a feladat feltétele szerint $w(e) \leq w(f)$, ezért $w(F') \leq w(F)$ (ahol $w(F')$ és $w(F)$ a két feszítőfa összsúlyát jelöli). Mivel F minimális összsúlyú feszítőfa, ezért F' is az (és valójában $w(F') = w(F)$). Mivel F' már tartalmazza e-t, az állítást beláttuk. (3 pont)

5. Maximálisan hány élet lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk? (Egy él hozzávétele azt jenti, hogy két meglévő csúcs közé húzunk be új élet, a gráfhoz további csúcsokat hozzávenni tehát nem szabad.)



* * * * *

A vizsgált G gráf valóban síkbarajzolható, ezt igazolja az alábbi ábra. (1 pont)
A szaggatottan behúzott élek mutatják, hogy lehetséges 2 élet G-hez venni úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjuk. (4 pont)



Ha G-hez 3 élet vennénk hozzá, akkor egy $n = 8$ csúcsú és $e = 19$ élű G' gráfot kapnánk. Ha G' egyszerű és síkbarajazolható volna, akkor a tanult tétel szerint $e \leq 3n - 6$, vagyis $19 \leq 18$ kellene teljesüljön, ami ellentmondás. (4 pont)
Ez tehát mutatja, hogy 3 élet már nem lehet a feltételek szerint G-hez venni, a válasz tehát 2. (1 pont)

6. A G gráf egy 101 csúcsú „csillag" – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100 fokú és száz 1 fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?

* * * * *

Ha a 100 darab (eredetileg) elsőfokú csúcsot 99 él hozzávételével egy útra „felfűzzük", akkor a kapott gráfban van Hamilton kör: a 100 pontú utat a csillag középpontjának (és két élnek) a közbeiktatásával 101 csúcsú körré (vagyis Hamilton-körré) zárhatjuk. (3 pont)

Megmutatjuk, hogy G-hez bárhogyan 98 (vagy kevesebb) élet hozzávéve a kapott gráfban még nem lesz Hamilton-kör. Így a válasz végül is 99 lesz. (1 pont)

Tegyük fel indirekten, hogy a H gráf G-ből legföljebb 98 él hozzávételével keletkezik és mégis van benne Hamilton-kör. Hagyjuk el H-ból a csillag középpontját (és a rá illeszkedő 100 élet), a kapott gráf legyen H'. (1 pont)

H'-nek tehát 100 csúcsa és legföljebb 98 éle van, így nem lehet összefüggő: valóban, ha az volna, akkor (a tanult tétel szerint) tartalmazna feszítőfát, amelynek már $100 - 1 = 99$ éle volna. (3 pont)

Eszerint a H gráfból 1 csúcsot elhagyva a kapott H' gráfnak legalább 2 komponense van, így a Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel nem teljesül H-ra. Ezért H nem tartalmazhat Hamilton-kört, ellentmondás. (2 pont)