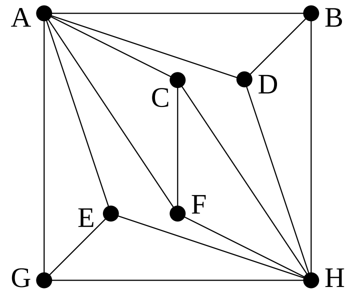
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2011. március 17.

1. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?



2. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (tízes számrendszerben felírt) n szám, amelyben a szomszédos számjegyek összege sosem 9, viszont bárhogyan is választunk két különböző (0 és 9 közötti) számjegyet, amelyek összege nem 9, a két választott számjegy pontosan egyszer fordul elő n-ben szomszédos helyeken (valamilyen sorrendben).

3. Legyen G perfekt gráf. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy feltétlenül igazak-e!

a) Ha G-ből elhagyunk egy élt, a kapott gráf is perfekt.

b) Ha G-hez hozzáveszünk egy élt, a kapott gráf is perfekt.

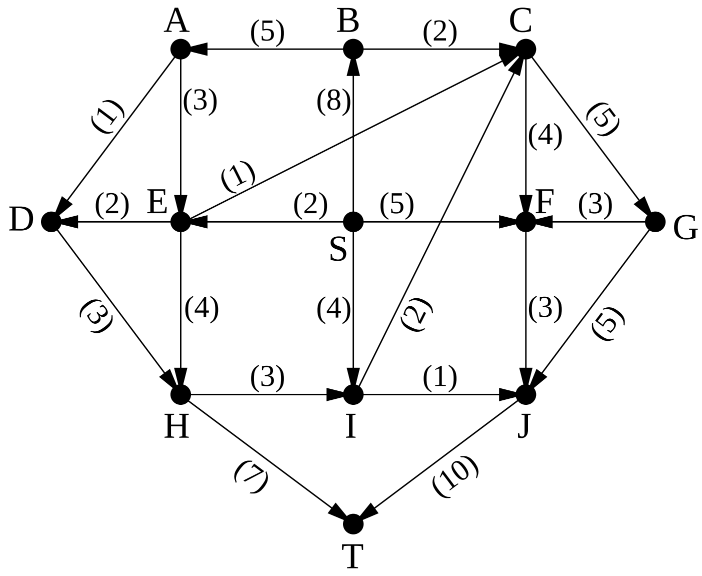
c) Ha G-ből elhagyunk egy csúcsot (az összes élével együtt), a kapott gráf is perfekt.

d) Ha G-hez hozzáveszünk egy új csúcsot és azt az összes meglévő csúccsal összekötjük, a kapott gráf is perfekt.

4. 64 kockacukorból építettünk egy $(4 \times 4 \times 4)$-es nagyobb kockát (amelynek tehát az élhosszúsága 4 kockacukornyi). A G gráf csúcsai legyenek a kockacukrok, két különböző csúcs pedig akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két kockacukor közös lap mentén szomszédosak az építményben. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, vagyis a G élkromatikus számát!

5. Jelölje G_8 azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_8) = 8$. Ekkor G_8-nak 191 csúcsa van. Határozzuk meg $\nu(G_8)$, vagyis a G_8-beli független élek maximális számának értékét!

6. Adjunk meg a jobb oldalt látható hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és egy minimális vágást!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok

2011. április 21.

1. Az alábbi A mátrix egy G irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa, a B mátrix pedig egy H hurokélmentes, irányított gráf illeszkedési mátrixa. Adjuk meg mindkét mátrixban a hiányzó ($\square$-val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a G és a H gráfot!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \square & 0 \\ \square & 0 & 1 & \square \\ 2 & \square & 0 & \square \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \square & 1 & 0 \\ \square & 0 & \square & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \square & \square \end{pmatrix}$$

2. A G egyszerű, n csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább $n+k-2$ (ahol $k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G k-szorosan összefüggő!

3. Milyen maradékot adhat egy egész szám 142-vel osztva, ha a 83-szorosa 1 maradékot ad 142-vel osztva?

4. Mennyi maradékot ad 3^{2011}-nel osztva $100^{3^{2011}}$?

5. Értelmezzük a térvektorok $\mathbb{R}^3$ halmazán a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b, c) * (d, e, f) = (a+d, b+e, ae+c+f)$$

Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^3$ csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

6. Legyen G véges csoport és g és h két tetszőleges elem G-ben. Mutassuk meg, hogy $o(g \cdot h) = o(h \cdot g)$! (A G-beli műveletet $\cdot$-tal jelöltük, o pedig az elem rendjét jelöli.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

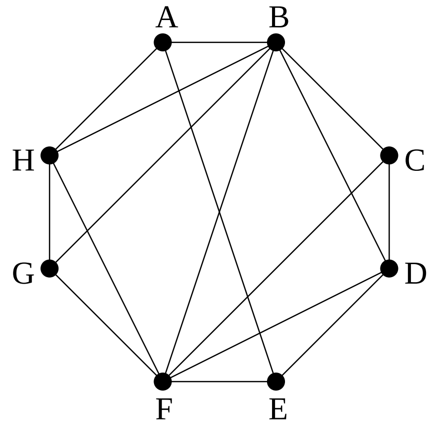
Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2011. május 9.

1. Egy banketten 50 vendég vesz részt, mindegyikük legalább 5 embert ismer a többiek közül. (Az ismeretségek kölcsönösek.) A vendégek közül bárhogyan is választunk 3-at, 4-et vagy 5-öt, ezek nem tudnak leülni egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismerje. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes vendég le tud ülni egy 50 fős, kör alakú asztal köré úgy, hogy bármely két, egymás mellett ülő, de egymást nem ismerő embernek legyen a vendégek közt közös ismerőse!

2. Az alábbi gráfnak mely éleire teljesül, hogy azt a gráfból elhagyva a kapott (15 élű) gráfban van Euler-út?



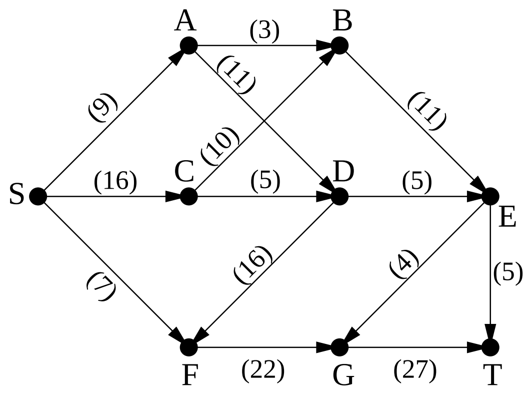
3. Tekintsük azokat az intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legföljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát!

4. Legyen G az a gráf, amelyet egy 2011 pontú körből kapunk úgy, hogy mindegyik élét helyettesítjük két párhuzamos éllel. Határozzuk meg G élkromatikus számát!

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Minden $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 7$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Van-e G-ben A-t lefedő párosítás?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

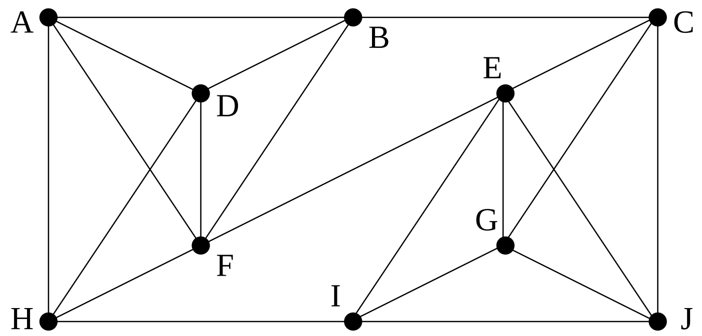
Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2011. május 9.

1. Igaz-e, hogy az alábbi gráf

a) 4-szeresen élösszefüggő;

b) 4-szeresen pontösszefüggő?



2. A 100 csúcsú, hurokélmentes G gráf szomszédossági mátrixát jelölje A. Mutassuk meg, hogy ha az A^{14} mátrix főátlójában álló elemek összege 10^9-nél kisebb, akkor G-nek van olyan csúcsa, amelynek a foka legföljebb 9.

3. Egy n egész számra teljesül, hogy $50n$ és $n+1$ azonos maradékot ad 178-cal osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

4. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám létezik, amelyre $2011^n - 1$ osztható n-nel!

5. Legyen $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ a nem az x-tengelyre eső síkvektorok halmaza. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

6. Bizonyítsuk be, hogy 50 elemű Abel-csoportban nem létezhet két olyan, egymástól és az egységelemtől különböző elem, amelyeknek a négyzete egyaránt az egységelem!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

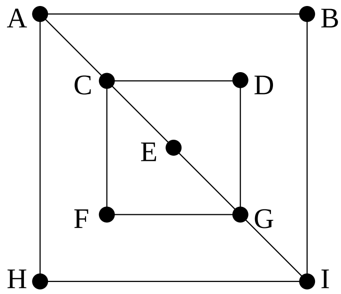
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2011. május 17.

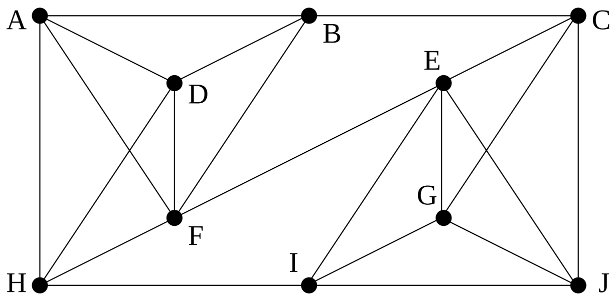
1. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?



2. Létezik-e olyan (véges) számsorozat, amelyre az alábbi három feltétel mindegyike teljesül:

1. a sorozat minden tagja az $1, 2, \ldots, 100$ számok valamelyike;
2. a sorozat bármely két, szomszédos tagja közül az egyik mindig osztója a másiknak;
3. bárhogyan is választunk az $1, 2, \ldots, 100$ számok közül két olyat, amelyek közül az egyik osztója a másiknak, pontosan kétszer fordul elő, hogy a két választott szám a sorozatban egymás mellett áll (valamilyen sorrendben)?

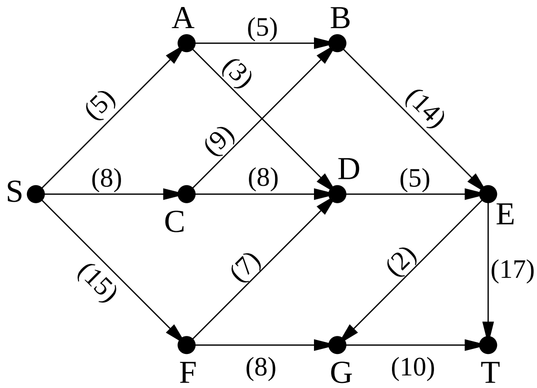
3. Határozzuk meg az alábbi gráf kromatikus számát!



4. Legyen G az a gráf, amelyet egy 2011 pontú teljes gráfból kapunk úgy, hogy mindegyik élét helyettesítjük két párhuzamos éllel. Határozzuk meg G élkromatikus számát!

5. Legyen G páros gráf, a G-beli maximális fokszámot jelölje Δ. Mutassuk meg, hogy G-ben létezik olyan M párosítás, amely az összes Δ fokú pontot lefogja (vagyis minden Δ fokú pontra illeszkedik M-beli él)!

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális ST-vágást!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2011. május 17.

1. Egy G irányítatlan gráf esetén jelölje $3 \cdot G$ azt a gráfot, amelyet G-ből kapunk úgy, hogy mindegyik élét helyettesítjük három párhuzamos éllel. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

a) Ha G összefüggő gráf, akkor $3 \cdot G$ 3-szorosan élösszefüggő gráf.

b) Ha G összefüggő, legalább 4 csúcsú gráf, akkor $3 \cdot G$ 3-szorosan pontösszefüggő gráf.

2. Legyen G irányítatlan, hurokélmentes gráf és legyen H egy olyan irányított gráf, amelyet G-ből nyerünk úgy, hogy mindegyik élét irányítjuk (valamelyik irányba). Legyen továbbá B a H illeszkedési mátrixa. Rajzoljuk le a G gráfot, ha tudjuk, hogy a $B \cdot B^T$ mátrix az alábbi:

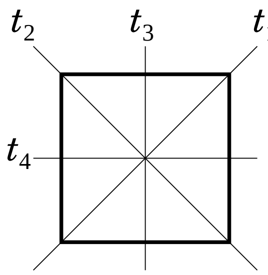
$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(B^T a B mátrix transzponáltját jelöli.)

3. Milyen maradékot adhat az n egész szám 202-vel osztva, ha $53n - 1$ osztható 202-vel?

4. Mi az utolsó két számjegye a 9-es számrendszerben a (10-es számrendszerben felírt) $20^{19^{18}}$ számnak?

5. Egy négyzetet önmagába vivő tengelyes tükrözéseket jelölje t_1, t_2, t_3 és t_4 az ábra szerint. Jelölje továbbá a négyzet középpontja körüli α szögű (pozitív, vagyis az óramutató járásával ellentétes forgásirány szerinti) elforgatást f_α. Adjuk meg az alábbi műveletek eredményét a D_4 diédercsoportban!



a) $t_1 \cdot t_4$ b) t_3^{-1} c) $(f_{90^\circ})^{2011}$

6. Legyen g és h a 60 elemű G Abel-csoport különböző, de egyaránt 3 rendű elemei. Bizonyítsuk be, hogy $h = g^2$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. március 17.

Általános alapelvek.

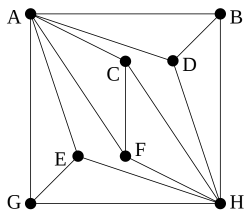
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?



* * * * *

Az A és H csúcsokat elhagyva a maradék gráfnak 3 komponense lesz (a $\{B, D\}$, a $\{C, F\}$ és a $\{G, E\}$ élek). (3 pont)
Így (a tanult tétel szerint) a gráfban nincs Hamilton-kör. (2 pont)
Azonban (például) az $\{E, F\}$ élt hozzávéve a gráfhoz abban már lesz Hamilton-kör (például az F, C, H, B, D, A, G, E, F sorrendben). (4 pont)
Így minimálisan 1 élt kell a gráfhoz venni, hogy legyen benne Hamilton-kör. (1 pont)

2. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (tízes számrendszerben felírt) n szám, amelyben a szomszédos számjegyek összege sosem 9, viszont bárhogyan is választunk két különböző (0 és 9 közötti) számjegyet, amelyek összege nem 9, a két választott számjegy pontosan egyszer fordul elő n-ben szomszédos helyeken (valamilyen sorrendben).

* * * * *

Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek, két különböző csúcs pedig pontosan akkor szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha a megfelelő számjegyek összege nem 9. (2 pont)
A feladat megoldásához azt kell belátnunk, hogy G-ben van Euler-út (vagy Euler-kör). Ugyanis ebben az esetben az Euler-utat végigjárva és az út során érintett számjegyeket sorban leírva épp a kívánt tulajdonságú számot kapunk. (4 pont)
G nyilván összefüggő: ha két csúcs nem szomszédos, mindig van közös szomszédjuk. (2 pont)
G-ben minden pont foka 8 (mert sajátmagán kívül még egy számjeggyel nem szomszédos: azzal, amelyik őt 9-re egészíti ki). (1 pont)
Mivel minden fokszám páros és G összefüggő, a tanult tétel szerint G-ben valóban van Euler-kör. (1 pont)
(A megoldáshoz elvileg hozzátartozna, hogy az Euler-kör bejárását nem a 0-tól kell indítani, hogy az első leírt számjegy ne 0 legyen; ennek elhagyásáért nem vonunk le pontot.)

3. Legyen G perfekt gráf. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy feltétlenül igazak-e!

a) Ha G-ből elhagyunk egy élt, a kapott gráf is perfekt.

b) Ha G-hez hozzáveszünk egy élt, a kapott gráf is perfekt.

c) Ha G-ből elhagyunk egy csúcsot (az összes élével együtt), a kapott gráf is perfekt.

d) Ha G-hez hozzáveszünk egy új csúcsot és azt az összes meglévő csúccsal összekötjük, a kapott gráf is perfekt.

* * * * *

a) Az állítás hamis. Ha igaz volna, az 5 pontú teljes gráfból – ami definíció szerint nyilván perfekt – egyesével éleket elhagyva mindig perfekt gráfokat kapnánk. Ez azonban nem így van: az 5 pontú kör (ami K_5-ből 5 él elhagyásával megkapható) nem perfekt. (2 pont)
b) Az állítás hamis. Egy 5 pontú út nyilván perfekt gráf (például mert páros gráf), de a végpontjait összekötve már nem perfekt gráfot kapunk. (2 pont)
c) Az állítás igaz. A kapott gráf minden F feszített részgráfja G-nek is nyilván feszített részgráfja, így arra $\chi(F) = \omega(F)$ fenn kell álljon G perfektsége miatt. (2 pont)
d) Az állítás igaz. Legyen a hozzávett új csúcs v, a v-vel kiegészített gráf G'. Legyen F' a G' egy feszített részgráfja. Ha $v \notin V(F')$, akkor F' feszített részgráfja G-nek is, így $\chi(F') = \omega(F')$. Ha viszont $v \in V(F')$, akkor F'-ből v-t elhagyva a kapott F-re $\chi(F) = \omega(F)$ ismét igaz, mert F már feszített részgráfja G-nek. Azonban $\chi(F') = \chi(F) + 1$, mert v színe minden más csúcsétól különböző kell legyen és $\omega(F') = \omega(F) + 1$, mert bármely F-beli klikk kiegészíthető v-vel. Így $\chi(F') = \omega(F')$ is igaz.(4 pont)

4. 64 kockacukorból építettünk egy $(4 \times 4 \times 4)$-es nagyobb kockát (amelynek tehát az élhosszúsága 4 kockacukornyi). A G gráf csúcsai legyenek a kockacukrok, két különböző csúcs pedig akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két kockacukor közös lap mentén szomszédosak az építményben. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, vagyis a G élkromatikus számát!

* * * * *

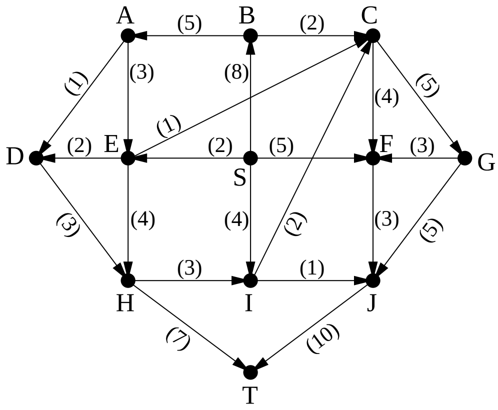
G-ben a maximális fokszám 6: bármely, nem a nagy kocka felszínére illeszkedő kockacukor 6 másikkal szomszédos (és 6-nál többel nyilván egy sem lehet). (3 pont)
G páros gráf. Ugyanis képzeljük az építményt 4 egymásra helyezett, (4×4)-es kockacukorrétegnek és mind a 4 réteget színezzük a sakktábla mezőihez hasonlóan, de az egymásra következő rétegeken mindig felcserélve a világos és sötét szerepét. Ekkor G csúcsait valóban úgy osztottuk két osztályra, hogy egyiken belül sem vezet él. (4 pont)
Így az előadáson tanult tételből (miszerint páros gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$) következően $\chi_e(G) = 6$.(3 pont)
A fenti tételre való hivatkozás helyettesíthető azzal is, ha megadjuk a gráf éleinek egy 6 színnel való színezését.

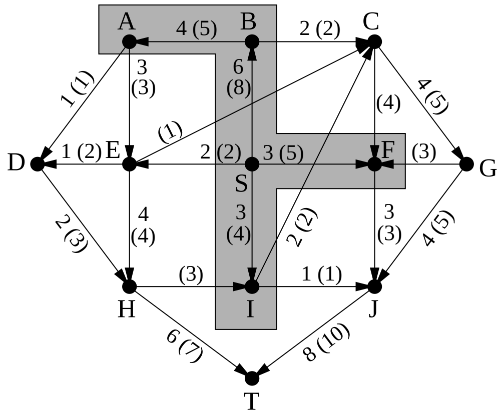
5. Jelölje G_8 azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_8) = 8$. Ekkor G_8-nak 191 csúcsa van. Határozzuk meg $\nu(G_8)$, vagyis a G_8-beli független élek maximális számának értékét!

* * * * *

$\nu(G_8) \leq 95$, hiszen 96 párhoz már 192 csúcsú gráf kellene. (1 pont)
Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $k \geq 3$-ra G_k-ban van olyan párosítás, amely csak egyetlen csúcsot hagy párosítatlanul.
Ebből már következni fog, hogy $\nu(G_8) = 95$. (1 pont)
$k = 3$-ra ez nyilván igaz, hiszen G_3 egy 5 pontú kör. (1 pont)
Tegyük fel, hogy G_k-ban adott egy M párosítás, ami egyedül az x csúcsot hagyja szabadon. G_{k+1}-et úgy kapjuk, hogy G_k minden v csúcsához felveszünk egy új v' csúcsot, ezt összekötjük v minden G_k-beli szomszédjával, végül egy további w csúcsot összekötünk az összes v' típusú ponttal.
Az M párosítás minden $\{u, v\}$ élét helyettesítsük az $\{u, v'\}$ és az $\{u', v\}$ élekkel. (4 pont)
A kapott párosítás csak három pontot hagy szabadon: x-et, x'-t és w-t. Azonban x' és w szomszédos, így az előbbit az $\{x', w\}$ éllel kiegészítve valóban olyan párosítást kapunk, ami csak egyetlen G_{k+1}-beli csúcsot (x-et) hagy szabadon. (3 pont)

6. Adjunk meg a bal oldalt látható hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és egy minimális vágást!





* * * * *

A fenti, jobb oldali ábrán látható folyam értéke 14. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (3 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, A, B, F, I\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, A, B, F, I\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 14. (4 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 14 értékű vágás bizonyítja, hogy a 14 értékű folyam maximális (1 pont)
és a 14 értékű folyam bizonyítja, hogy a 14 értékű vágás minimális. (1 pont)
Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam, illetve vágás maximális, illetve minimális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális, a vágás minimális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 3 pontból 1-et kapjon.) Lehet úgy is érvelni, hogy a 14 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út, tehát a folyam maximális.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. április 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az alábbi A mátrix egy G irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa, a B mátrix pedig egy H hurokélmentes, irányított gráf illeszkedési mátrixa. Adjuk meg mindkét mátrixban a hiányzó ($\square$-val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a G és a H gráfot!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \square & 0 \\ \square & 0 & 1 & \square \\ 2 & \square & 0 & \square \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \square & 1 & 0 \\ \square & 0 & \square & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \square & \square \end{pmatrix}$$

* * * * *

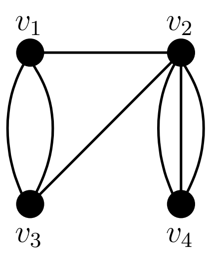
Minden irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa (a főátlójára) szimmetrikus, hiszen az $a_{i,j}$ és az $a_{j,i}$ elem is a v_i és a v_j csúcsok közti élek száma. (2 pont)

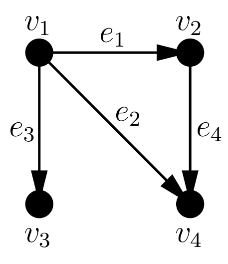
Ez alapján A hiányzó elemei kitölthetők: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Minden hurokélmentes, irányított gráf illeszkedési mátrixában minden oszlop 1 darab 1-est és 1 darab (-1)-est tartalmaz, a többi elem 0 (hiszen az oszlopnak megfelelő él egy csúcsból kilép, egy másikba belép, a többire nem illeszkedik). (2 pont)

Ez alapján B hiányzó elemei kitölthetők: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (1 pont)

A mátrixokból G és H már definíció szerint rekonstruálhatók:

$G =$ 

$H =$ 

(2+2 pont)

2. A G egyszerű, n csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább $n+k-2$ (ahol $k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G k-szorosan összefüggő!

* * * * *

Indirekt tegyük fel, hogy G nem k-szorosan összefüggő. Ekkor a $t \leq k-1$ elemű X ponthalmaz elhagyása után kapott gráf már nem összefüggő, vagyis a csúcsai az A és a B (nemüres) halmazokra bonthatók úgy, hogy A és B között nem fut él. (3 pont)
Jelölje A és B elemszámát a, illetve b.
Legyen $u \in A$ és $v \in B$ tetszőleges. Ekkor a fentiek szerint u és v nem szomszédosak. (1 pont)
Mivel u csak (sajátmagától különböző) A-beli, valamint X-beli csúcsokkal lehet szomszédos G-ben, ezért $d(u) \leq a-1+t$. Hasonlóan, $d(v) \leq b-1+t$. (3 pont)
Ezeket összeadva és felhasználva, hogy $a+b+t=n$ kapjuk: $d(u)+d(v) \leq n+t-2$. (2 pont)
Mivel $t \leq k-1$, ebből $d(u)+d(v) \leq n+k-3$, ami ellentmondás (mert u és v nem szomszédos).(1 pont)

3. Milyen maradékot adhat egy egész szám 142-vel osztva, ha a 83-szorosa 1 maradékot ad 142-vel osztva?

* * * * *

A feladat a $83n \equiv 1 \pmod{142}$ lineáris kongruencia. (1 pont)
2-vel szorozva: $166n \equiv 2 \pmod{142}$, vagyis $24n \equiv 2 \pmod{142}$. (1 pont)
2-vel osztva: $12n \equiv 1 \pmod{71}$. (2 pont)
6-tal szorozva: $72n \equiv 6 \pmod{71}$, vagyis $n \equiv 6 \pmod{71}$. (2 pont)
Ebből $n \equiv 6, 77 \pmod{142}$. (1 pont)
Ellenőrzéssel kiderül, hogy a 6 hamis gyök (ami a 2-vel szorzásnál jött be), így a megoldás $n \equiv 77 \pmod{142}$ (vagyis a kérdéses szám 77 maradékot adhat 142-vel osztva). (3 pont)
A lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). Aki a fenti megoldást, vagy más, hamis gyököt behozó megoldást ad, de nem foglalkozik a hamis gyök kiszűrésével, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(83,142)|1$, így a kongruenciának van megoldása, de a megoldást kiszámolni nem tudja, az összesen 2 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

4. Mennyi maradékot ad 3^{2011}-nel osztva $100^{3^{2011}}$?

* * * * *

$\varphi(3^{2011}) = 3^{2011} - 3^{2010} = 2 \cdot 3^{2010}$ (a tanult képlet szerint). (1 pont)
Mivel $(10, 3^{2011}) = 1$ (hiszen a két szám prímtényezős felbontásában nyilván nincs közös prím),(1 pont)
ezért alkalmazható rájuk az Euler-Fermat tétel: $10^{\varphi(3^{2011})} = 10^{2 \cdot 3^{2010}} \equiv 1 \pmod{3^{2011}}$. (2 pont)
Ebből $100 = 10^2$ helyettesítéssel: $100^{3^{2010}} \equiv 1 \pmod{3^{2011}}$. (3 pont)
Ezt köbre emelve: $100^{3 \cdot 3^{2010}} = 100^{3^{2011}} \equiv 1^3 = 1 \pmod{3^{2011}}$ (vagyis a keresett maradék: 1).(3 pont)
Aki nem jön rá, hogy az Euler-Fermat tételt 10-re (és 3^{2011}-re) érdemes alkalmazni, de 100-ra (és 3^{2011}-re) alkalmazza (helyesen), az a fenti pontozásbeli első 4 pontot megkaphatja. (A pontozás utolsó két 3-as pontszáma épp azért ilyen magas, mert itt értékeljük a megoldás lényeges ötletét, a 10-re való alkalmazást.) A feladat megoldása egyébként helyesen, de komplikáltabban befejezhető a 100-ra felírt Euler-Fermat tételből is.

5. Értelmezzük a térvektorok $\mathbb{R}^3$ halmazán a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b, c) * (d, e, f) = (a + d, b + e, ae + c + f)$$

Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^3$ csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az asszociativitás ellenőrzéséhez vegyünk három térvektort: (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i).
Ekkor

$$\Big((a, b, c) * (d, e, f)\Big) * (g, h, i) =$$
$$(a + d, b + e, ae + c + f) * (g, h, i) = (a + d + g, b + e + h, (a + d)h + ae + c + f + i) \quad \text{(1 pont)}$$

és

$$(a, b, c) * \Big((d, e, f) * (g, h, i)\Big) =$$
$$(a, b, c) * (d + g, e + h, dh + f + i) = (a + d + g, b + e + h, a(e + h) + c + dh + f + i), \quad \text{(1 pont)}$$

ami $(a + d)h + ae + c + f + i = a(e + h) + c + dh + f + i$ miatt az asszociativitást igazolja. (1 pont)
Van egységelem a $*$-ra nézve, mégpedig a $(0, 0, 0)$, (1 pont)
ugyanis $(a, b, c) * (0, 0, 0) = (a + 0, b + 0, a \cdot 0 + c + 0) = (a, b, c)$ (1 pont)
és $(0, 0, 0) * (a, b, c) = (0 + a, 0 + b, 0 \cdot b + 0 + c) = (a, b, c)$. (1 pont)
A tetszőleges (a, b, c) elemnek $(-a, -b, ab - c)$ inverze lesz, (1 pont)
mert $(a, b, c) * (-a, -b, ab - c) = (a - a, b - b, a(-b) + c + ab - c) = (0, 0, 0)$ (1 pont)
és $(-a, -b, ab - c) * (a, b, c) = (-a + a, -b + b, (-a)b + ab - c + c) = (0, 0, 0)$. (1 pont)
Mivel a definíció minden feltétele teljesül, ezért $\mathbb{R}^3$ $*$-ra nézve csoport. (1 pont)
Az utolsó 1 pont annak jár, aki a korábbi számolásaiból helyes következtetést von le (akkor is, ha egy hibás számolásból arra következtet, hogy nem csoport).

6. Legyen G véges csoport és g és h két tetszőleges elem G-ben. Mutassuk meg, hogy $o(g \cdot h) = o(h \cdot g)$! (A G-beli műveletet $\cdot$-tal jelöltük, o pedig az elem rendjét jelöli.)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Vezessük be az $o(g \cdot h) = k$ és az $o(h \cdot g) = l$ jelöléseket, a csoport egységelemét jelölje e.
Mivel $o(g \cdot h) = k$, ezért $e = (g \cdot h)^k$, vagyis $e = g \cdot h \cdot g \cdot h \cdot \ldots \cdot g \cdot h$ (ahol a szorzatban k darab $g \cdot h$ tag szerepel). (1 pont)
Szorozzuk ezt az egyenletet balról g^{-1}-zel; ekkor a bal oldalon $g^{-1} \cdot e = g^{-1}$, a jobb oldalon pedig (a szorzat első tagjánál) keletkező $g^{-1} \cdot g$ szorzat e-t ad, így elhagyható: $g^{-1} = h \cdot g \cdot h \cdot \ldots \cdot g \cdot h$.(2 pont)
Most szorozzuk a kapott egyenletet jobbról g-vel és a bal oldalon keletkező $g^{-1} \cdot g$ szorzatot helyettesítsük e-vel: $e = g^{-1} \cdot g = h \cdot g \cdot h \cdot \ldots \cdot g \cdot h \cdot g$. (2 pont)
Most a jobb oldalon k darab $h \cdot g$ tag keletkezett, vagyis $e = (h \cdot g)^k$. (1 pont)
Így a $(h \cdot g)$ rendjének definíciója miatt $l \leq k$. (2 pont)
Mivel g és h szerepe a feladatban szimmetrikus, teljesen hasonlóan $k \leq l$ is belátható, amiből a feladat állítása következik. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2011. május 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

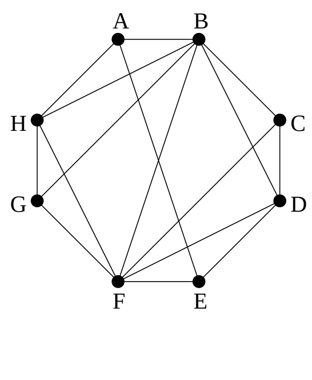
Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy banketten 50 vendég vesz részt, mindegyikük legalább 5 embert ismer a többiek közül. (Az ismeretségek kölcsönösek.) A vendégek közül bárhogyan is választunk 3-at, 4-et vagy 5-öt, ezek nem tudnak leülni egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismerje. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes vendég le tud ülni egy 50 fős, kör alakú asztal köré úgy, hogy bármely két, egymás mellett ülő, de egymást nem ismerő embernek legyen a vendégek közt közös ismerőse!

* * * * *

Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai a vendégek és az élek az ismeretségeknek felelnek meg.
Legyen továbbá H az a gráf, amelynek csúcsai ismét a vendégek, de két vendég akkor szomszédos H-ban, ha ismerik egymást, vagy van közös ismerősük. A feladat azt megmutatni, hogy H-ban van Hamilton-kör. (1 pont)
Legyen v tetszőleges vendég. A feladat szerint van legalább 5 ismerőse, ezek H-ban (is) szomszédai. Továbbá v minden ismerősének van v-n kívül legalább 4 ismerőse, akikkel v szomszédos H-ban.(2 pont)
A felsorolt legalább $5 + 4 \cdot 5 = 25$ H-beli szomszéd közül bármely kettő különböző, hiszen ha v két ismerőse között volna ismeretség az egy 3 hosszú, ha v egy ismerőse és egy „másodismerőse" között volna ismeretség, az egy 4 hosszú kört jelentene G-ben; a feladat szerint ezek nem fordulnak elő.(5 pont)
A H egyszerű gráf tehát 50 pontú és minden pont foka legalább 25, így a Dirac-tétel miatt valóban van benne Hamilton-kör. (2 pont)
(Megjegyezzük, hogy a megoldásban nem használtuk ki azt a feltételt, hogy a gráfban – a feladat szövege szerint – 5 hossszúságú kör sincs.)

2. Az alábbi gráfnak mely éleire teljesül, hogy azt a gráfból elhagyva a kapott (15 élű) gráfban van Euler-út?



* * * * *

A gráfban a páratlan fokú pontok: A, C, E és G. (1 pont)
Az $\{A, E\}$ élet elhagyva A és E foka párosra változik (1 pont)
és a maradék gráf összefüggő is lesz, (1 pont)
így a tanult tétel szerint lesz benne Euler-út. (1 pont)
Azonban $\{A, E\}$-n kívül más él nem felel meg a feladat feltételének: mivel $\{A, E\}$ az egyetlen olyan él a gráfban, ami A, C, E és G közül köt össze kettőt, bármely más él elhagyása után e közül a négy pont közül legalább három még páratlan fokú marad (sőt: még egy további páratlan fokú is keletkezik), így nem lesz a maradék gráfban Euler-út. (6 pont)

3. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legföljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát!

* * * * *

Legyen G a feladatbeli gráf. Az előadáson tanult tétel (miszerint az intervallumgráfok perfektek) miatt $\chi(G) = \omega(G)$. Így $\chi(G)$ helyett $\omega(G)$-t is meghatározhatjuk. (1 pont)
Ha G-ben klikket alkot néhány csúcs, akkor a megfelelő intervallumok közül bármely kettő metsző; vagyis a klikkek az egy adott számot tartalmazó intervallumok halmazának felelnek meg. Így a kérdés az, hogy legföljebb hány k-t tartalmazó intervallum lehet G-ben, ha $1 \leq k \leq 100$. (3 pont)
Ha k páros, akkor a 4 hosszúakból legföljebb 3 van ($[k-4, k]$, $[k-2, k+2]$, $[k, k+4]$), a 3 hosszúakból legföljebb 4 ($[k-3, k]$, $[k-2, k+1]$, $[k-1, k+2]$, $[k, k+3]$) a 2 hosszúakból legföljebb 2 ($[k-2, k]$, $[k, k+2]$) és az 1 hosszúakból is legföljebb 2 ($[k-1, k]$, $[k, k+1]$). (A „legföljebb” mindig arra utal, hogy a felsorolt intervallumok 1-hez vagy 100-hoz közeli k-kra kilóghatnak $[1, 100]$-ból.) (2 pont)
Ha k páratlan, akkor a 3 és 1 hosszú intervallumok esetében nincs változás, de a 4 és 2 hosszúak száma eggyel-eggyel kisebb: $[k-3, k+1]$ és $[k-1, k+3]$, illetve $[k-1, k+1]$. (2 pont)
Következésképp a k-t tartalmazó intervallumok maximális száma 11 (ami 6 és 96 közötti páros k-kra következik be), így $\omega(G) = \chi(G) = 11$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a hiánytalan megoldáshoz elvileg hozzátartozna annak indoklása is, hogy a fenti megoldásban elegendő egész k-kat vizsgálni; ennek elmulasztásáért azonban nem vonunk le pontot. A feladat megoldható úgy is, hogy a gráfban mutatunk egy 11-es klikket (a fentiek szerint pl. az 50-et tartalmazó intervallumok) és egy 11 színnel való helyes színezést (pl. az 1 hosszúakat felváltva 2 színnel színezzük, a 2 hosszúakat ugyanígy 2 újabb színnel, a 3 hosszúakat ciklikusan váltogatva 4 színnel, a 4 hosszúakat ugyanígy 3 színnel). Ha így indoklunk, az intervallumgráfok perfektségére nem kell hivatkozni.

4. Legyen G az a gráf, amelyet egy 2011 pontú körből kapunk úgy, hogy mindegyik élét helyettesítjük két párhuzamos éllel. Határozzuk meg G élkromatikus számát!

* * * * *

G minden élszínezésében bármely színt legföljebb 1005-ször használhatunk (hiszen 1006, azonos színű élhez 2012 csúcs kellene). (2 pont)
Ezért 4 szín nem lehet elegendő egy helyes élszínezéshez: így összesen $4 \cdot 1005 = 4020$ élet színezhetnénk meg, pedig G-nek $2 \cdot 2011 = 4022$ éle van. (3 pont)
Megadjuk G egy élszínezését 5 színnel. Bontsuk fel G élhalmazát két 2011 hosszú körre (a „külső körre” és a „belső körre”). Mindkettő megszínezhető három színnel például úgy, hogy két színt felváltva használva megszínezünk 2010 élet, a harmadik színt pedig csak egyszer használjuk (amikor „a kör zárul”). Azonban G élszínezésekor a $3 + 3$ színhez képest spórolhatunk egy színt, ha a „külső” és a „belső” körön is a fenti színezést használjuk, de a két esetben a harmadik, egyszer használatos színt azonosnak választjuk (legyen ez például a zöld). Ez könnyen megtehető, ha a két körön vett színezést elforgatjuk egymáshoz képest úgy, hogy a két zöld él ne legyen szomszédos. (5 pont)
Megmutattuk, hogy G élszínezéséhez 5 szín szükséges, de ennyi elégséges is, ezért $\chi_e(G) = 5$.
Megjegyezzük, hogy mivel G nem egyszerű gráf, ezért a tanult Vizing-tétel nem alkalmazható rá, így a fenti megoldásban a színezés megadása nem kerülhető meg.

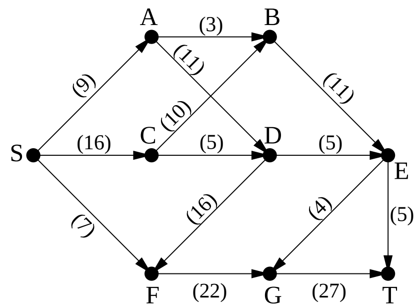
5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Minden $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 7$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Van-e G-ben A-t lefedő párosítás?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

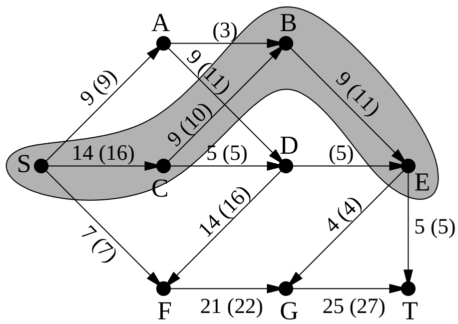
A mátrixból kiolvasható, hogy az a_1, a_3, a_5 és a_6 csúcsok minden szomszédja a b_2, b_5 és b_6 csúcsok közül kerül ki (vagyis a Hall-tétel jelöléseit használva $N(\{a_1, a_3, a_5, a_6\}) = \{b_2, b_5, b_6\}$). (5 pont)
Így nyilván nincs G-ben A-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (Lehet a Hall-tétel triviális irányára is hivatkozni, miszerint az $X = \{a_1, a_3, a_5, a_6\}$ választással $|N(X)| < |X|$, így nincs A-t lefedő párosítás.) (5 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás kulcsa nyilván az $\{a_1, a_3, a_5, a_6\}$ halmaz megtalálása. Ez – tekintettel a gráf aránylag kicsi méretére – próbálgatással sem nehéz, de az előadáson tanult javító utas algoritmus is gyorsan ide vezet.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be)!



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 30. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (4 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, C, B, E\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, C, B, E\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 30. (4 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 30 értékű vágás bizonyítja, hogy a 30 értékű folyam maximális. (1 pont)
Az utolsó 2 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 2 pontból 1-et kapjon.) Lehet úgy is érvelni, hogy a 30 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út, tehát a folyam maximális.



Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2011. május 9.

Általános alapelvek.

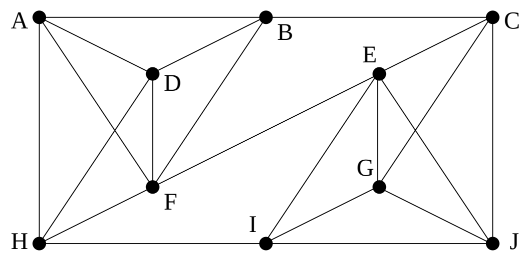
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Igaz-e, hogy az alábbi gráf
a) 4-szeresen élösszefüggő;
b) 4-szeresen pontösszefüggő?



* * * * *

a) A $\{B, C\}$, $\{E, F\}$ és $\{H, I\}$ élek elhagyásával kapott gráf nem összefüggő,(2 pont) így a gráf nem 4-szeresen élösszefüggő. (4 pont)

b) Mivel a gráf 4-szeres pontösszefüggőségéből a 4-szeresen élösszefüggőség is következne, ezért a gráf 4-szeresen pontösszefüggő sem lehet. (4 pont)
(A b) feladat persze a definíciót használva is megoldható: például a B, F és H pontok elhagyásával kapott gráf nem összefüggő.)

2. A 100 csúcsú, hurokélmentes G gráf szomszédossági mátrixát jelölje A. Mutassuk meg, hogy ha az A^{14} mátrix főátlójában álló elemek összege 10^9-nél kisebb, akkor G-nek van olyan csúcsa, amelynek a foka legföljebb 9.

* * * * *

Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{100}\}$. Az A^{14} főátlójában álló i-edik elem a v_i-ből sajátmagába vezető, pontosan 14 élű élsorozatok száma. (1 pont)
Bármely v_i-ből indulva 14 élű, v_i-be vezető élsorozatot kapunk, ha tetszőlegesen megválasztva a v_i-re illeszkedő $e_1, e_2, \dots, e_7$ (nem feltétlen különböző) éleket, először e_1-en, majd e_2-n, stb., végül e_7-en „oda-vissza” haladunk. (4 pont)
Ha $d(v_i) = d$, akkor ezzel d^7 különböző, v_i-ből v_i-be vezető élsorozatot kapunk. (3 pont)
Ha tehát indirekt feltesszük, hogy minden pont foka legalább 10, akkor ezzel minden v_i-re legalább 10^7, összesen pedig legalább $100 \cdot 10^7 = 10^9$ különböző élsorozatot kapnánk. Ez ellentmond annak, hogy az A^{14} főátlójában álló elemek összege 10^9-nél kisebb. (2 pont)
(Megjegyezzük, hogy a fenti megoldásban d^7 természetesen nem az *összes* v_i-ből v_i-be vezető, 14 hosszúságú élsorozat száma; a megoldásban csupán annyit állítunk, hogy d^7 darab ilyen élsorozatot még a leírt, nagyon speciális módon is találhatunk.)

3. Egy n egész számra teljesül, hogy $50n$ és $n + 1$ azonos maradékot ad 178-cal osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

* * * * *

A feladat az $50n \equiv n + 1 \pmod{178}$ lineáris kongruencia. (1 pont)
n-et levonva: $49n \equiv 1 \pmod{178}$. (1 pont)
4-gyel szorozva: $196n \equiv 4 \pmod{178}$, vagyis $18n \equiv 4 \pmod{178}$. (1 pont)
2-vel osztva: $9n \equiv 2 \pmod{89}$. (1 pont)
10-zel szorozva: $90n \equiv 20 \pmod{89}$, vagyis $n \equiv 20 \pmod{89}$. (1 pont)
Ebből $n \equiv 20, 109 \pmod{178}$. (1 pont)
Ellenőrzés mutatja, hogy a 20 hamis gyök (ami a 4-gyel szorzásnál jött be), így $n \equiv 109 \pmod{178}$. (3 pont)
Ebből $n + 1 \equiv 110 \pmod{178}$, így a keresett közös maradék a 110. (1 pont)
A lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). Aki a fenti megoldást, vagy más, hamis gyököt behozó megoldást ad, de nem foglalkozik a hamis gyök kiszűrésével, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(49, 178)|1$, így a kongruenciának van megoldása, de azt kiszámolni nem tudja, az összesen (az első átrendezéssel együtt) 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

4. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám létezik, amelyre $2011^n - 1$ osztható n-nel!

* * * * *

Olyan n egészeket keresünk, amelyekre $2011^n \equiv 1 \pmod{n}$. (1 pont)
Legyen n 2-hatvány, vagyis $n = 2^k$ valamely $k \geq 1$-re. (2 pont)
Ekkor $\varphi(n) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$. (1 pont)
Mivel 2011 páratlan, $(n, 2011) = 1$, (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tétel miatt $2011^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{n}$. (2 pont)
Ezt négyzetre emelve: $2011^{2^k} = 2011^n \equiv 1 \pmod{n}$. (2 pont)
Tehát mutattunk végtelen sok olyan pozitív egészt (a 2-hatványokat), amelyekre az állítás igaz. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás azon múlik, hogy n-et 2-hatványnak választjuk. Azonban erre rájönni nem nehéz: ha az Euler-Fermat tételből nyert kongruenciát hatványozva akarunk eljutni a feladatbeli $2011^n \equiv 1 \pmod{n}$ állításhoz, akkor ebből a $\varphi(n)\big|n$ feltételhez jutunk. A $\varphi(n)$ képletéből pedig nem nehéz észrevenni, hogy ez a 2-hatványokra teljesül. (Egyébként $\varphi(n)\big|n$ a $2^k \cdot 3^l$, $k \geq 1$, $l \geq 0$ alakú számokra igaz, így a 2-hatványokon kívül is vannak megoldásai a feladatnak.)

5. Legyen $H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ a nem az y-tengelyre eső síkvektorok halmaza. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

Az asszociativitás ellenőrzéséhez vegyünk három H-beli elemet: (a, b), (c, d), (e, f).
Ekkor $\big((a, b) * (c, d)\big) * (e, f) = (ac, ad + b) * (e, f) = (ace, acf + ad + b)$ és (1 pont)
$(a, b) * \big((c, d) * (e, f)\big) = (a, b) * (ce, cf + d) = (ace, a(cf + d) + b)$, (1 pont)
ami $acf + ad + b = a(cf + d) + b$ miatt az asszociativitást igazolja. (1 pont)
Van egységelem a $*$-ra nézve, mégpedig az $(1, 0)$, (1 pont)
ugyanis $(a, b) * (1, 0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + b) = (a, b)$ (1 pont)
és $(1, 0) * (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b + 0) = (a, b)$. (1 pont)
A tetszőleges (a, b) elemnek $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \in H$ inverze lesz, (1 pont)
mert $(a, b) * (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (1, -b + b) = (1, 0)$ (1 pont)
és $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) * (a, b) = (1, \frac{b}{a} - \frac{b}{a}) = (1, 0)$. (1 pont)
Mivel a definíció minden feltétele teljesül, ezért H $*$-ra nézve csoport. (1 pont)
Az utolsó 1 pont annak jár, aki a korábbi számolásaiból helyes következtetést von le (akkor is, ha egy hibás számolásból arra következtet, hogy nem csoport). Megjegyezzük, hogy a feladatbeli H zárt $*$-ra, hiszen $(a, b) \in H$ és $(c, d) \in H$ esetén $a \neq 0$, $c \neq 0$, így $ac \neq 0$, vagyis $(ac, ad + b) \in H$. Azonban H zártságát a feladat szövege is állítja, amikor $*$-ot műveletnek nevezi. Ezért ennek ellenőrzéséért nem jár külön pont.

6. Bizonyítsuk be, hogy 50 elemű Abel-csoportban nem létezhet két olyan, egymástól és az egységelemtől különböző elem, amelyeknek a négyzete egyaránt az egységelem!

$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

Tegyük fel indirekt, hogy $a^2 = e$ és $b^2 = e$ egy 50 elemű G Abel-csoport két különböző elemére, ahol e az egységelem és $a \neq e \neq b$ (és G műveletét szorzással jelöltük).
Legyen $c = a \cdot b$. Ekkor $c \neq a$, mert $a = a \cdot b$-ből balról a^{-1}-zel szorzással $e = b$ következne.
Hasonlóan, $c \neq b$. (1 pont)
Legyen $H = \{a, b, c, e\}$. Állítjuk, hogy H részcsoportja G-nek; ez viszont a Lagrange-tétel miatt ellentmondás (hiszen $4 \nmid 50$), amiből a feladat állítása következik. (3 pont)
H zárt az inverzképzésre: $c^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = e \cdot e = e$ miatt $c^{-1} = c$ és hasonlóan $a^{-1} = a$ és $b^{-1} = b$ (és $e^{-1} = e$). (2 pont)
H zárt a szorzásra is. Ez e-vel szorzásra nyilván igaz, $x^2 = e \in H$ minden $x \in H$-ra fennáll, $ab = c$ definíció szerint, így (felhasználva a művelet kommutativitását is) elég az ac és bc szorzatokat ellenőrizni. Ebből $ac = a(ab) = a^2b = eb = b$ és $bc = b(ab) = ab^2 = ae = a$, ami a zártságot valóban mutatja. (3 pont)
Mivel pedig H zárt a műveletre és az inverzképzésre, ezért valóban részcsoport. (1 pont)