Bevezetés a számításelméletbe II.
1. zárthelyi, 2010.03.25.

1. Jelölje B_n azt a gráfot, melynek csúcsai az n hosszúságú $0-1$ sorozatok, két sorozat akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha pontosan egy vagy két helyen különböznek. Adjuk meg az összes olyan n-et, amire a B_n gráf tartalmaz (zárt) Euler-körsétát.

2. Egy G egyszerű gráf csúcsainak száma 100, legkisebb fokszáma pedig 80. Mutassuk meg, hogy G tartalmaz 16 olyan Hamilton-kört, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös éle.

3. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni.

4. Egy gráf csúcsai a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek, két különböző csúcsot összekötünk, ha az összegük osztható hárommal. Perfekt-e a gráf?

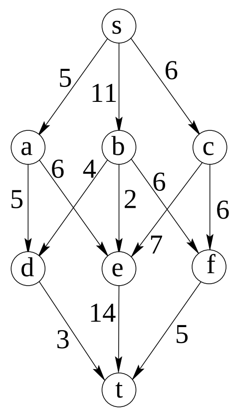
5. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 55. Mennyi a kromatikus száma, ha tudjuk, hogy a komplementere páros gráf?

6. Egy G egyszerű páros gráfban minden csúcs fokszáma legalább k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-ben van k élet tartalmazó párosítás.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zárthelyi, 2010.04.22.

1. Legfeljebb hány éle lehet egy olyan 100 csúcsú egyszerű gráfnak, aminek a kromatikus száma 11?
2. Melyik az a legnagyobb k szám, melyre a 32 csúcsú, 3 osztályú Turán–gráf k-szorosan összefüggő?
3. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



4. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, ami osztható 6-tal és pontosan 9 osztója van.
5. Mennyi maradékot ad 2010-zel osztva 49^{1585}?
6. Mutassuk meg, hogy $\varphi(n) + d(n) \leq n + 1$ minden n pozitív egészre és adjunk meg egy olyan $n > 10$ számot, melyre egyenlőség teljesül. (φ az Euler-féle φ-függvény, $d(n)$ pedig az n pozitív osztóinak száma.)

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
ELSŐ zárthelyi pótlása, 2010.05.06.

1. Egy 101 csúcsú egyszerű reguláris gráf (azaz olyan gráf, melyben minden csúcs foka azonos) élkromatikus száma 50. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van Euler-köre.

2. (a) Lehetséges-e, hogy egy 100 csúcsú egyszerű reguláris gráf és a komplementere közül egyik sem tartalmaz Hamilton-kört?

   (b) Lehetséges-e, hogy egy 100 csúcsú egyszerű reguláris gráf és a komplementere is tartalmaz Hamilton-kört?

3. Egy 2010 csúcsú teljes gráfból kitörlünk két nem csatlakozó élet. Mennyi lesz a kapott gráf kromatikus száma?

4. Egy 101 csúcsú gráf legrövidebb köre pontosan 100 csúcsot tartalmaz. Igaz-e, hogy a gráf biztosan páros?

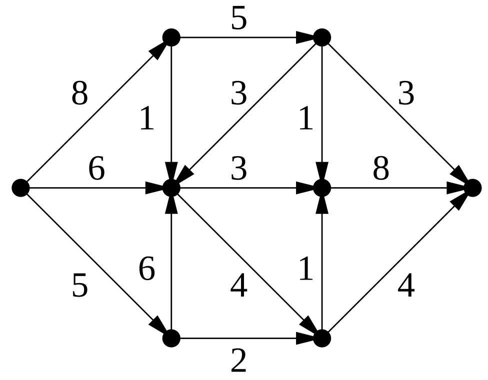
5. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Mutassuk meg, hogy ebből nem következik, hogy a gráfban van teljes párosítás.

6. Egy gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, két (különböző) csúcsot összekötünk, ha a szorzatuk osztható 7-tel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
MÁSODIK zárthelyi pótlása, 2010.05.06.

1. Legalább hány éle van egy olyan 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak, amelyben bármely 3 csúcs közül valamelyik 2 össze van kötve?
2. Az F gráf 10-szeresen összefüggő, de 11-szeresen már nem. Legyen G az a gráf, amit úgy kapunk, hogy F minden csúcsát összekötjük egy, a gráfhoz újonnan hozzávett csúccsal. Melyik a legnagyobb k szám, melyre G k-szorosan összefüggő?
3. Határozzunk meg egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



4. Mutassuk meg, hogy két négyzetszám legnagyobb közös osztója is négyzetszám.
5. Mutassuk meg, hogy minden a, b pozitív egészre
$$\varphi(a)\varphi(b) \leq \varphi(ab).$$
6. Mennyi maradékot ad 22-vel osztva $3^{22} + 33^{22} + 333^{22}$?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
ELSŐ pótpótzh, 2010.05.18.

1. Lehetséges-e, hogy egy 2011 csúcsú gráf és a komplementere is tartalmazzon Euler-sétát, de egyikük se tartalmazzon Euler-kört?

2. Egy százfős társaságban fennáll, hogy ha ketten nem ismerik egymást, akkor mindketten ismernek legalább negyven olyan embert, akit a másik nem ismer, továbbá legalább tíz közös ismerősük is van. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Igaz-e, hogy ekkor a társaság tagjai leültethetők úgy egy százszemélyes kerek asztal köré, hogy mindenki ismerje a két mellette ülőt?

3. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf valamely párosítása tovább már nem bővíthető (azaz nincs olyan él a gráfban, melyet hozzávéve párosítás marad), akkor legalább feleannyi élet tartalmaz, mint G egy maximális párosítása.

4. Egy tíznapos üdülés szervezője az üdülés mind a tíz napjára felajánl tizenhat lehetséges program közül pontosan ötöt. Ugyanazt a programot soha nem ajánlja fel két egymást követő napra. Mutassuk meg, hogy biztosan kiválasztható minden napra az aznapra felajánlott programok egyike úgy, hogy a tíz napra tíz különböző programot válasszunk ki.

5. Egy 50 csúcsú teljes gráfból hagyjuk el egy Hamilton-körének éleit. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma?

6. Mutassuk meg, hogy ha G n csúcsú perfekt gráf, akkor $\alpha(G) \geq \sqrt{n}$ és $\omega(G) \geq \sqrt{n}$ közül legalább az egyik teljesül.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe II.
MÁSODIK pótpótzh, 2010.05.18.

1. Legalább hány éle van egy 100 csúcsú gráfnak, ha független pontjainak maximális száma 11?
2. Kössük össze egy kilenc csúcsú körben a (körön) másod-szomszédos pontokat is éllel. Mi az a legnagyobb k szám, amire a kapott 4-reguláris gráf k-szorosan élösszefüggő?
3. Egy hálózatban az e él kapacitása 3, minden más él kapacitása 2. Igaz-e, hogy ha a hálózat egy maximális folyamának értéke páratlan egész szám, akkor az e élen a folyamérték 3?
4. Melyik az az n szám, melynek 2010 osztója van és $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ is teljesül rá?
5. Egy $n \geq 5$ pozitív egész szám relatív prím minden nála kisebb, hárommal osztható pozitív számhoz. Mutassuk meg, hogy n prím.
6. Határozzuk meg $33^{21^{34}}$ utolsó két számjegyét (a tízes számrendszerben).

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.