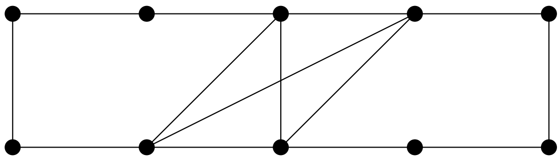
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2009. március 23.

1. Legyen G egy 101 csúcsú egyszerű gráf, amelyben az egyik pont foka 50, az összes többi pont foka 49. Bizonyítsuk be, hogy G-hez hozzá lehet venni 50 darab élet úgy, hogy a kapott gráf továbbra is egyszerű gráf legyen és tartalmazzon Euler-kört.

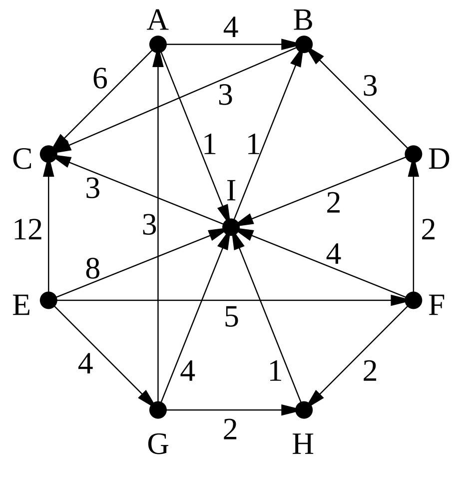
2. Legkevesebb hány élet kell törölni az alábbi gráfból ahhoz, hogy páros gráfot kapjunk?



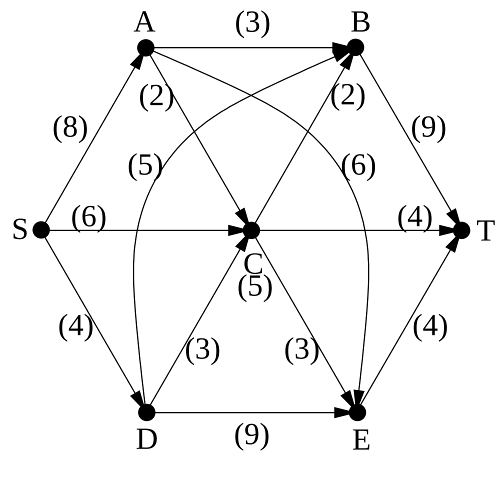
3. Legyen G egy 20 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet G-ből a v (és az összes v-re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G - v) = \chi_e(G)$ (ahol χ_e a gráfok élkromatikus számát jelöli).

4. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 60\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$, vagyis a G-beli független élek maximális számának értékét!

5. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



6. Az alábbi hálózatban az éleken kívül a C csúcsnak is van kapacitása. Adjunk meg egy maximális folyamot S-ből T-be (és bizonyítsuk be róla, hogy maximális)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2009. április 24.

1. Hány olyan 600-nál nem nagyobb, pozitív egész a szám van, amelyre az $a \cdot x \equiv 1 \pmod{600}$ lineáris kongruencia megoldható?

2. Egy mértani sorozat első tagja 41, kvóciense 7. (A sorozat tagjai tehát: 41, 287, 2009, ...). Képzeletben szorozzuk össze a sorozat első 800 tagját. Mi a kapott szám utolsó 3 számjegye?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a egy 11-gyel nem osztható egész szám, akkor az $x^3 \equiv a \pmod{121}$ kongruencia megoldható (vagyis létezik olyan x egész, amelyre a kongruencia fennáll).

4. Értelmezzük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $*$ műveletet a következőképpen:

$$a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3 - 8}$$

Döntsük el, hogy $\mathbb{R}$ csoportot alkot-e $*$-ra nézve.

5. Az alábbiakban a $\{p, q, r, s, t, u\}$ alaphalmazon értelmezett G csoport műveleti táblája látható:

$*$	p	q	r	s	t	u
p	u	t	q	p	r	s
q	t	u	p	q	s	r
r	q	p	s	r	u	t
s	p	q	r	s	t	u
t	r	s	u	t	p	q
u	s	r	t	u	q	p

(A műveleti tábla használata értelemszerű: $a * b$ értékét az a-nak megfelelő sor és a b-nek megfelelő oszlop kereszteződésében találjuk; így például $p * q = t$ és $t * u = q$.)
a) Mennyi az u elem rendje?
b) Ciklikus csoport-e G?
(A megoldáshoz feltételezhetjük, hogy G valóban csoport, ezt bizonyítani nem kell.)

6. Legyen G véges Abel-csoport és legyen $g, h \in G$ két tetszőleges elem. Mutassuk meg, hogy ha $(o(g), o(h)) = 1$, akkor $o(g * h) = o(g) \cdot o(h)$. (A G-beli műveletet $*$-gal jelöltük. A gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót, o pedig az elem rendjét jelöli.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2009. május 4..

1. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Az x és az y különböző csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x + y$ vagy $x \cdot y$ osztható 7-tel.

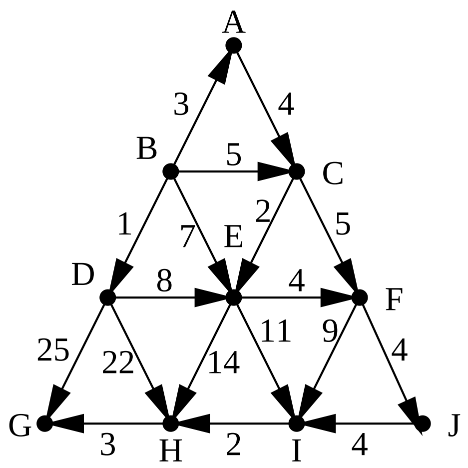
a) Van-e G-ben Hamilton-út?

b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

2. A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői; két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy huszár az egyik megfelelő mezőről indulva pontosan három lépéssel el tudja érni a másikat. Döntsük el, hogy G páros gráf-e! (A sakkban a huszár egy lépése abból áll, hogy először két mezőt halad függőlegesen vagy vízszintesen, utána még egy mezőt halad az előző mozgásirányára merőlegesen.)

3. Legyen $k \geq 3$ és jelölje G_k azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_k) = k$ és legyen G_k csúcsainak száma n. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G_k}) \geq \frac{n+1}{2}$ (ahol $\overline{G_k}$ a G_k gráf komplementerét jelöli).

4. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



5. Határozzuk meg annak a gráfnak az élkromatikus számát, amelyet egy öt élű körből nyerünk úgy, hogy minden élét helyettesítjük három párhuzamos éllel!

6. Legyen $k \geq 1$ egész és legyen G egy legalább $2k+1$ pontú, k-szorosan összefüggő gráf. Értelmezzük a H gráfot a következőképpen: legyen $V(H) = V(G)$ és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos H-ban ha G-ben szomszédosak vagy van közös szomszédjuk. Bizonyítsuk be, hogy a H gráf $2k$-szorosan összefüggő.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2009. május 4.

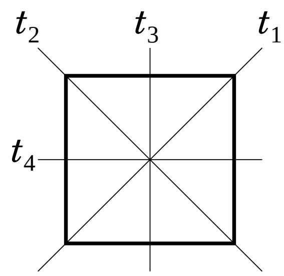
1. Hány olyan 540-nél nem nagyobb, pozitív egész a szám van, amelyre az $a \cdot x \equiv 2 \pmod{540}$ lineáris kongruencia megoldható?

2. Valamely n egészre teljesül, hogy $24n + 24$ és $n + 25$ ugyanazt a maradékot adják 188-cal osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

3. Az (a_n) sorozatot értelmezzük a következő rekurziós képlettel: $a_1 = 25$ és $a_{n+1} = 4a_n - 3$ minden $n \geq 1$ egész esetén. (A sorozat tagjai tehát: 25, 97, 385, ...) Milyen maradékot ad a sorozat első 25 tagjának szorzata 72-vel osztva?

4. Egy négyzetet önmagába vivő tengelyes tükrözéseket jelölje t_1, t_2, t_3 és t_4 az ábra szerint. Jelölje továbbá a négyzet középpontja körüli α szögű (pozitív, vagyis az óramutató járásával ellentétes forgásirány szerinti) elforgatást f_α. Adjuk meg az alábbi műveletek eredményét a D_4 diédercsoportban!

a) $t_3 \cdot f_{90°}$ b) $(t_1 \cdot t_2)^{-1}$



5. Legyen adott a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $*$ művelet. Tegyük fel, hogy $(\mathbb{R}, *)$ csoport, amely izomorf a nullától különböző valós számok szorzással vett csoportjával. Tudjuk továbbá, hogy fennállnak a következő egyenlőségek: $3 * 3 = 7$, $5 * 5 = 7$, $7 * 7 = \sqrt{2}$ és $9 * 9 = \sqrt{2}$. Határozzuk meg $3 * 5$ értékét!

6. Tegyük fel, hogy a 77 elemű G csoport az egységelemtől különböző a és b elemeire teljesül, hogy van olyan $k \geq 1$ egész, amelyre $a^k = b$, de nincs olyan $l \geq 1$ egész, amelyre $b^l = a$. Bizonyítsuk be, hogy G ciklikus csoport!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

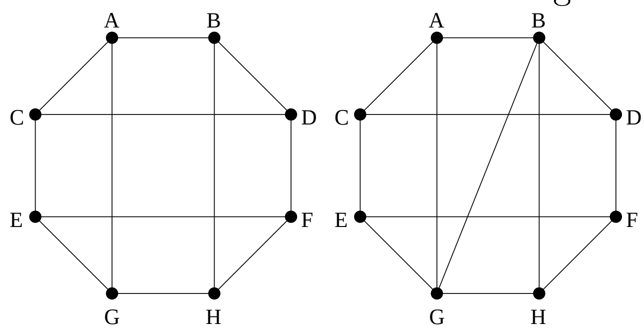
Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2009. május 20.

1. Létezik-e olyan lépéssorozat egy bástyával a 8×8-as sakktáblán, melynek során az összes lehetséges lépést pontosan egyszer megtesszük, de mindegyiket csak az egyik irányban? (A sakkban a bástya bármely mezőről egy azzal akár egy sorban, akár egy oszlopban lévő másik mezőre léphet. A feladat szerint tehát ha X és Y egy sorban vagy egy oszlopban lévő mezők, akkor a keresett lépéssorozatban az $X \to Y$ és az $Y \to X$ lépések közül pontosan az egyiknek kell előfordulnia.)

2. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két szám közül az egyik osztója a másiknak. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t!

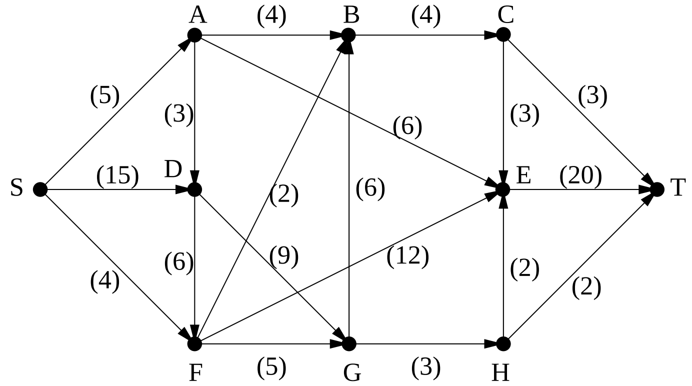
3. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



4. Határozzuk meg annak a gráfnak az élkromatikus számát, amelyet egy ötcsúcsú teljes gráfból nyerünk úgy, hogy minden élét helyettesítjük két párhuzamos éllel!

5. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) + \nu(\overline{G}) \geq \frac{n-1}{2}$ fennáll minden n csúcsú G egyszerű gráfban. ($\overline{G}$ a G gráf komplementerét, ν a gráfbeli független élek maximális számát jelöli.)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be (és bizonyítsuk be róla, hogy maximális)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2009. május 20.

1. Tetszőleges a és b pozitív egészek esetén jelölje $\langle a, b\rangle$ a legkisebb olyan x pozitív egészt, amelyre $a|bx$ és $b|ax$ teljesül. Mutassuk meg, hogy

$$\langle a, b\rangle = \frac{[a, b]}{(a, b)}$$

teljesül (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót, a szögletes zárójel a legkisebb közös többszöröst jelöli)!

2. Határozzuk meg az összes olyan háromjegyű egész számot (a tízes számrendszerben), amely 40-nel osztva 3, 58-cal osztva pedig 17 maradékot ad!

3. Legyenek a, k és n olyan pozitív egész számok, amelyekre $(a, n) = 1$ és $(k, \varphi(n)) = 1$ teljesülnek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor megoldható az $x^k \equiv a \pmod{n}$ kongruencia (vagyis létezik olyan x egész, amelyre a kongruencia fennáll)!

4. Értelmezzük $\mathbb{Z}$-n, az egész számok halmazán a $*$ műveletet a következőképpen:

$$x * y = \begin{cases} x + y + 3, & \text{ha } x \text{ páros és } y \text{ páros,} \\ x + y - 1, & \text{ha } x \text{ páratlan vagy } y \text{ páratlan.} \end{cases}$$

(Így például $4 * 6 = 13$ és $2 * 5 = 6$.) Csoportot alkot-e $\mathbb{Z}$ a $*$ műveletre nézve?

5. A G csoport alaphalmaza legyen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a csoport $*$ művelete pedig legyen a „modulo 7 szorzás” (vagyis $a * b$ egyenlő az $a \cdot b$ szorzat 7-es maradékával). Döntsük el, hogy a G csoport ciklikus-e! (A megoldáshoz feltételezhetjük, hogy G valóban csoport, ezt bizonyítani nem kell.)

6. Legyen G egy 25 rendű csoport. Ha összeadnánk G összes elemének a rendjét, mi lenne a kapott összeg utolsó két számjegye?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.