Bevezetés a számításelméletbe II.
2. pótzárthelyi — pontozási útmutató
2015. május 4.

Általános alapelvek.

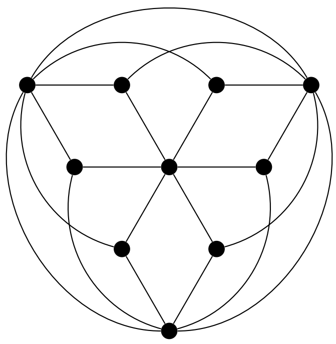
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az alább látható gráf kromatikus számát.



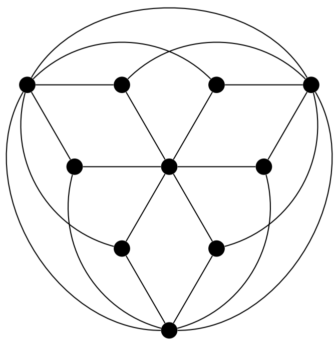
* * * * *

A középső, 6 fokú csúcsot 1-esre, a szomszédait (akik közül semelyik kettő nincs összekötve) 2-esre, a három maradék csúcsot (melyek egyike sincs összekötve a középsővel) 1-esre, 3-asra, illetve 4-esre színezve jó színezést kapunk, (4 pont)
tehát a kromatikus szám legfeljebb 4. (1 pont)
A sarkokban lévő 3 csúcs mindegyikére igaz, hogy három másik csúcs van, amellyel nem szomszédosak, (1 pont)
ezek viszont nem alkotnak független halmazt, (1 pont)
így azon színosztály, melyben egy sarokban lévő csúcs van, legfeljebb három csúcsot tartalmazhat. (1 pont)
Mivel ezek a színosztályok a három sarokban lévő csúcs esetén különbözők kell legyenek (hiszen e három csúcs háromszöget alkot), szükség van legalább négy színosztályra, (1 pont)

így a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)

Létezik más jó 4-színezés is, és természetesen másképp is belátható, hogy 3 szín nem elég. Ez utóbbi történhet tipikusan úgy, hogy kiválasztunk egy háromszöget, amit muszáj 3 különböző színnel színezni, majd megmutatjuk, hogy ez a színezés az adott 3 színnel nem terjeszthető ki az egész gráfra. Aki ezt precízen, indokolva teszi, az természetesen 5 pontot kapjon erre a részre. Aki kissé hiányos indoklással, de láthatóan ezen az elven dolgozik, az 2-4 pontot, míg az, aki csak egy konkrét próbálkozásról (pl. a mohó színezésről) látja be, hogy nem lesz jó, 0-1 pontot kapjon.

2. Határozzuk meg az alább látható gráfban a független élek maximális számát.



* * * * *

Számozzuk a csúcsokat a fölső sorban balról jobbra 1-től 4-ig, az alattuk levő sorban 5-től 7-ig, s.í.t.. Ekkor 1-2, 3-4, 5-6, 8-10 egy négy élű párosítás, (3 pont)
így a keresett maximum legalább 4. (1 pont)
Az 1,4,6,10 csúcsok (vagyis a négy darab 6 fokú csúcs) lefogó halmazt alkot. (4 pont)
Mivel minden párosítás legfeljebb akkora lehet, mint bármely lefogó ponthalmaz, (1 pont)
a látott 4 élű párosítás maximális kell, hogy legyen. (1 pont)

3. Legyen G olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyre G-ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.

* * * * *

Mivel G-ben van Hamilton-kör és az páratlan hosszú, (2 pont)
így G nem páros gráf, vagyis a kromatikus száma legalább 3. (2 pont)
A G komplementerében lévő Hamilton körön az 1. és a 2. csúcs színezhető ugyanazzal a színnel, (1 pont)
hiszen G-ben nem szomszédosak. (1 pont)
Ugyanígy színezhetők azonos színnel a 3. és a 4., illetve az 5. és a 6. csúcsok. (2 pont)
A 7. csúcsot egy negyedik színnel színezve most a gráf egy jó 4-színezését kapjuk, (1 pont)
ahonnan a kromatikus szám legfeljebb 4. (1 pont)

4. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

* * * * *

Első megoldás. Először megmutatjuk, hogy a páros gráf két osztálya ugyanakkora kell legyen. Ha ez nem így lenne, akkor a kisebbik osztályban legfeljebb 4 csúcs lenne, (1 pont)

így legfeljebb $4 \cdot 4 = 16$ él mehetne ki belőle, (1 pont)
míg a nagyobbik osztályban legalább 6 pont lenne és így ebből legalább $6 \cdot 3 = 18$ él menne ki, (1 pont)
ami nyilván lehetetlen. (1 pont)
Most a Hall-feltétel teljesülését vizsgáljuk meg. Legyen X az egyik osztály tetszőleges részhalmaza. Ha X legfeljebb 3 elemű, akkor $|N(X)| \geq |X|$ nyilvánvalóan igaz. (1 pont)
Ha X legalább 4 elemű, akkor $N(X)$ 5 elemű lesz (sőt, ehhez elég az is, ha X 3 elemű), (2 pont)
mivel ellenkező esetben az $N(X)$-ben nem szereplő csúcsnak nem lehetne legalább 3 szomszédja. (2 pont)
Így a gráfban teljesül a Hall-feltétel, amiből az állítás (a Hall- vagy a Frobenius-tétel szerint) már következik. (1 pont)

Második megoldás. Az élszínezésre vonatkozó Kőnig-tétel szerint a gráf élkromatikus száma legfeljebb 4, (1 pont)
így ha van legalább 17 éle, (1 pont)
akkor a skatulya-elv szerint tetszőleges 4 színnel való élszínezésében kell legyen olyan színosztály, amely 5 élből áll, azaz teljes párosítás. (2 pont)
Ha a gráfnak legfeljebb 16 éle van, akkor legfeljebb két 4 fokú csúcsa lehet, (1 pont)
így legfeljebb két él elhagyásával elérhető, hogy minden fok legfeljebb 3 legyen a gráfban. (2 pont)
A visszamaradó gráf élkromatikus száma tehát a Kőnig-tétel szerint legfeljebb 3. (1 pont)
A visszamaradó gráfnak még mindig legalább 13 éle lesz (hiszen az eredeti gráfnak legalább 15 volt), (1 pont)
így megint csak a skatulyaelv alapján a visszamaradó gráfnak (és így persze az eredeti gráfnak is) lesz 5 élű, azaz teljes párosítása. (1 pont)

5. Mutassuk meg, hogy ha G 9 csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$.

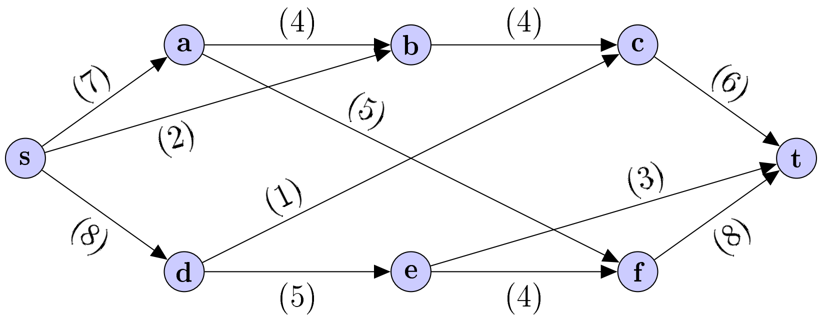
* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a G-beli maximális fokszámot d-vel. Ekkor G komplementerében van $8-d$ fokú csúcs, (1 pont)
így a komplementerben a maximális fokszám legalább $8-d$. (1 pont)
Ahhoz, hogy ennél ne legyen nagyobb a maximális fokszám $\overline{G}$-ben, nyilván az kell, hogy minden csúcs foka épp $8-d$ legyen (hiszen ennél kisebb fok nem lehet $\overline{G}$-ben, mert ekkor nem d lenne a maximális fok G-ben). (2 pont)
Ha tehát van két különböző fok $\overline{G}$-ben (ami ekvivalens azzal, hogy van két különböző fok G-ben), akkor a maximális fok $\overline{G}$-ben legalább $9-d$. (1 pont)
Mivel bármely gráf élkromatikus száma legalább akkora, mint a gráfbeli maximális fokszám, ebből a feladat állítása azonnal következik. (1 pont)
Ha viszont G-ben minden fok ugyanannyi, akkor d színnel G nem élszínezhető, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis bármely színosztály teljes párosítást alkotna, 9 csúcsú gráfban pedig ilyen nincs. (2 pont)
Így $\chi_e(G) \geq d+1$, ahonnan a feladat állítása ismét következik. (1 pont)

Második megoldás. A K_9 teljes gráf éleit meg lehet színezni $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G})$ színnel. (2 pont)
Valóban, először a G-beli éleket $\chi_e(G)$ színnel, majd a nem G-beli (azaz $\overline{G}$-beli) éleket $\chi_e(\overline{G})$ színnel színezve K_9 jó élszínezését kapjuk $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G})$ színnel. (4 pont)
K_9-ben minden fok 8, de 8 szín nem elég az élszínezéséhez, (1 pont)
ellenkező esetben ugyanis bármely színosztály teljes párosítást alkotna, 9 csúcsú gráfban pedig

ilyen nincs. (2 pont)
Így $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$. (1 pont)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.



* * * * *

A következő f folyam értéke 15: $f(sa) = 7, f(sd) = 6, f(sb) = 2, f(ab) = 2, f(af) = 5, f(bc) = 4, f(ct) = 5, f(dc) = 1, f(de) = 5, f(et) = 2, f(ef) = 3, f(ft) = 8$ (a többi élen a folyam értéke 0). (4 pont)
Az s, d csúcsok által meghatározott vágás kapacitása az sa, sb, dc, de élek összkapacitása, azaz szintén 15. (3 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 15 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 15 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például "a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 15 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.