Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2015. május 4.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Hány olyan 5 elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, 10\}$ halmaznak, amelyikben több a páros szám, mint a páratlan?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Első megoldás. Három eset lehetséges: a keresett részhalmaznak lehet 5, 4 vagy 3 páros eleme (és így a maradék 0, 1, illetve 2 eleme páratlan). (1 pont)
A 3 páros számot tartalmazó részhalmazok megszámolásához először válasszunk ki a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ halmazból 3 elemet, erre a lehetőségek száma $\binom{5}{3} =$ (1 pont)
$= \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$; (1 pont)
majd az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból válasszuk ki a hiányzó 2 páratlan elemet, itt a lehetőségek száma $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$. (1 pont)
Mivel a 3 páros szám kiválasztására vonatkozó 10 lehetőség mindegyikét 10-féleképp folytathatjuk a 2 páratlan elem kiválasztásakor, ezért a 3 páros számot tartalmazó részhalmazok száma végül is $10 \cdot 10 = 100$. (1 pont)
Hasonlóan számolhatjuk meg a 4 páros és 1 páratlan számot tartalmazó halmazokat: a lehetőségek száma $\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{1} = 5 \cdot 5 = 25$. (1 pont)
5 páros számot tartalmazó halmazból nyilván csak 1 van. (1 pont)
Így a lehetőségek száma összesen végül is 100+25+1=126. (3 pont)

Második megoldás. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz 5 elemű részhalmazainak száma $\binom{10}{5} =$ (1 pont)

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (= 252).$ (2 pont)

Ezek között a részhalmazok között pontosan ugyanannyi azoknak a száma, amelyekben több a páros szám, mint azoké, amelyekben a páratlan több. Valóban: ha minden 5 elemű részhalmazt párba állítunk (például) a komplementerével, akkor ezzel a páros számokból többet tartalmazó részhalmazok mindegyikének egy, a páratlanokból többet tartalmazót feleltettünk meg. (Ezzel tehát bijekciót adtunk meg a kétféle részhalmazok között.) (4 pont)

Így az 5 elemű részhalmazok halmazát két egyenlő részre vágtuk (hiszen a páros és páratlan elemek száma egyenlő nem lehet), ezért azon 5 elemű részhalmazok száma, amelyekben a páros szám több, a fele az összesnek: $\frac{1}{2}\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2} (= 126).$ (3 pont)

2. Létezik-e olyan 21 csúcsú G egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy G és annak a $\overline{G}$ komplementere is tartalmaz 9 darab 4 fokú és 3 darab 10 fokú pontot?

* * * * *

Tegyük fel, hogy G ilyen gráf. Ha egy v csúcs foka $\overline{G}$-ben 4, akkor v foka G-ben $20 - 4 = 16$ (mert v a tőle különböző csúcsok közül azokkal szomszédos G-ben, amelyekkel $\overline{G}$-ben nem). (1 pont)

Így G-ben minden csúcs fokát ismerjük: 9 db 4 fokú, 3 db 10 fokú és 9 db 16 fokú csúcsa van.(2 pont)

Jelölje a G 16 fokú csúcsainak halmazát A, a többi csúcsét B. Ha $v \in A$ tetszőleges, akkor a v-ből induló élek közül legföljebb 8 mehet A-beli csúcsba (hiszen G egyszerű), így legalább $16 - 8 = 8$ élnek B-beli csúcsba kell érkeznie. (2 pont)

Ez minden A-beli csúcsról elmondható, így összesen legalább $9 \cdot 8 = 72$ él megy A-ból B-be. (1 pont)

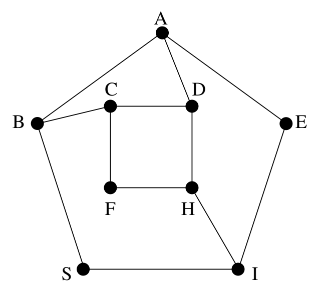
Azonban az A-beli csúcsok összfokszáma csak $9 \cdot 4 + 3 \cdot 10 = 66$, így legföljebb ennyi él érkezhet meg A-ba B-ből. (2 pont)

Ez az ellentmondás mutatja, hogy ilyen G gráf nem létezik. (2 pont)

3. A jobbra látható ábráról „véletlenül” lemaradt a gráf egy éle (de a csúcsok mind rajta vannak). Megállapítható-e biztosan, hogy a hiányzó él melyik két csúcsot kötötte össze, ha tudjuk, hogy az S-ből indított BFS algoritmus a gráf csúcsait az alábbi sorrendben járta be:

a) S, B, I, C, A, F, H, E, D;
b) S, I, B, E, F, H, C, A, D?

Ahol a válasz az, hogy a hiányzó él egyértelműen megállapítható, ott adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát is.



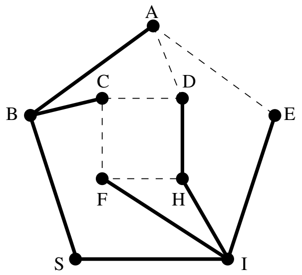
* * * * *

a) A hiányzó él lehetett akár a $\{B, F\}$, akár az $\{I, F\}$. Valóban: az első esetben az S szomszédainak, vagyis B-nek és I-nek a bejárása után az algoritmus a B szomszédait sorolja, ezek közül C és A után épp az utolsóként F-et; a másik esetben a B szomszédai után az I szomszédainak felsorolását kezdi az eljárás F-fel. Így nem állapítható meg biztosan a hiányzó él. (3 pont)

b) A sorozat negyedik helyén álló E elérhető lehetne közvetlenül az S-ből is, ha a hiányzó él $\{S, E\}$ volna; ekkor azonban az E után nem következhetne F, mert az sem S-nek, sem I-nek nem lehetne már szomszédja. Így S-nek csak az ábrán is látható két szomszédja van. (2 pont)

Ezek felsorolása után tehát I (további) szomszédainak kell következni. Mivel a sorozatban E, F, H következik, világos, hogy az $\{I, F\}$ él hiányzik a gráfból, más lehetőség most nincs. (2 pont)

Az ehhez a bejáráshoz tartozó BFS-fa tehát a következő:



(3 pont)

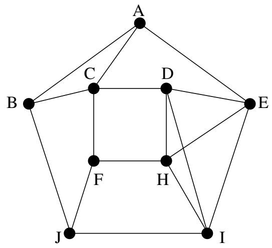
4. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Első megoldás. Állítsuk w értéke szerinti növekvő sorrendbe G éleit úgy, hogy ha G-nek van e-n kívül más $w(e)$ súlyú éle is, akkor a $w(e)$ súlyúak közül e legyen utolsóként felsorolva. (2 pont)
A minimális összsúlyú feszítőfa megkeresésére szolgáló Kruskal-algoritmust lefuttathatjuk az éleknek ebből a sorrendjéből kiindulva is (hiszen az algoritmus csak a w szerinti növekvő sorrendet írja elő, az azonos súlyú élek sorrendje közömbös). (1 pont)
Mivel a Kruskal-algoritmus (a tanult tétel szerint) minimális összsúlyú feszítőfát ad, megoldjuk a feladatot, ha megmutatjuk, hogy a kapott F feszítőfa nem tartalmazza e-t. (1 pont)
Jelölje az e előtt az eljárás által kiválasztott élek (és G összes csúcsa) által alkotott gráfot F_0. A Kruskal-algoritmus csak akkor dönt úgy, hogy e-t beveszi F élei közé, ha e az F_0-nak két különböző komponense között halad (mert csak így fordulhat elő, hogy $F_0 \cup \{e\}$ nem tartalmaz kört). (1 pont)
Tegyük fel tehát, hogy e az F_0 két különböző komponense között fut. Induljunk el a C körön az e egyik végpontjától a másikig (az e-t nem használva). Eközben kell találnunk olyan f élt, ami szintén F_0 különböző komponensei között fut (különben C mentén haladva végig ugyanabban a komponensben maradnánk). (2 pont)
Mivel f-et az eljárás korábban vizsgálta e-nél (ha $w(f) < w(e)$, akkor az algoritmus működési szabálya szerint, ha pedig $w(f) = w(e)$, akkor a sorrendre vonatkozó választásunk miatt), ezért f-nél rosszul döntött: ha f-et még F_0-hoz hozzávéve sem keletkezik kör, akkor az f-nél korábban vizsgált élekhez hozzávéve sem keletkezhetett. (2 pont)
Ez az ellentmondás mutatja, hogy a Kruskal-algoritmus által megadott F feszítőfa valóban nem tartalmazza e-t. (1 pont)

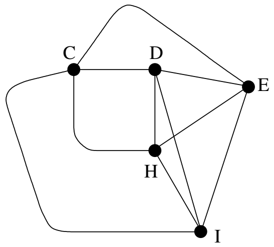
Második megoldás. Legyen F egy tetszőleges, minimális összsúlyú feszítőfa (a w élsúlyozás szerint). Ha F nem tartalmazza e-t, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel ezért, hogy tartalmazza. (1 pont)
Ha F-ből elhagyjuk e-t, akkor a kapott F_0 gráfnak két komponense lesz. Induljunk el a C körön az e egyik végpontjától a másikig (az e-t nem használva). Eközben kell találnunk olyan f élt, ami szintén F_0 két komponense között fut (különben C mentén haladva végig ugyanabban a komponensben maradnánk). (2 pont)
Hagyjuk ki F-ből e-t és vegyük be helyette f-et; a kapott részgráfot jelölje F'. Állítjuk, hogy F' is egy feszítőfa. (2 pont)
Mivel f az F_0 gráf két komponensét köti össze, ezért F' valóban összefüggő. (1 pont)
Továbbá mivel $|E(F')| = |E(F)| = n - 1$ (ahol $n = |V(G)|$), ezért F' körmentes is: ha nem így volna, akkor a tanult „hagyjuk el egy kör egy élét” eljárás $(n-1)$-nél kisebb élszámú feszítőfát adna; ez a tanultak szerint lehetetlen. Mivel F' összefüggő, körmentes és $V(F') = V(G)$, ezért feszítőfa. (2 pont)
Mivel a feladat feltétele szerint $w(f) \leq w(e)$, ezért $w(F') \leq w(F)$ (ahol $w(F')$ és $w(F)$ a két feszítőfa összsúlyát jelöli). Mivel F minimális összsúlyú feszítőfa, ezért F' is az (és valójában $w(F') = w(F)$). Mivel F' már nem tartalmazza e-t, az állítást beláttuk. (2 pont)

5. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Hagyjuk el a gráfból az $\{A, B\}$ és a $\{J, F\}$ éleket. (2 pont)
A keletkező gráfban A, B, F és J foka 2 lesz, ezeket „olvasszuk össze” egyetlen éllé: (2 pont)



A kapott gráf a K_5 (az 5 csúcsú teljes gráf), mert bármely két csúcsa szomszédos. (2 pont)
Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot is tartalmaz (például a $\{B, C\}$, $\{C, F\}$, $\{D, E\}$ és $\{H, I\}$ élek elhagyásával, majd a kapott másodfokú pontok összeolvasztásával kaphatunk ilyet), így a feladatnak más jó megoldása is van.

6. A 30 csúcsú G összefüggő, egyszerű gráf csúcsai közül 10-et pirosra, 10-et kékre, 10-et zöldre színeztünk. Tudjuk, hogy minden csúcs legalább 5, vele azonos színű csúccsal szomszédos és minden csúcs legföljebb 1, tőle különböző színű csúccsal szomszédos. Mutassuk meg, hogy G-ben van legalább 25 élből álló út.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Jelölje a piros, a kék, illetve a zöld csúcsok által feszített részgráfokat P, K, illetve Z. Mindhárom gráf 10 csúcsú, egyszerű és a feladat feltétele miatt bennük minden pont foka legalább 5, így a Dirac-tétel miatt tartalmaznak egy-egy Hamilton-kört. (2 pont)
G összefüggő, így P, K és Z közül legalább az egyiket mindkét másikkal összeköti egy-egy él (különben P, K vagy Z külön komponenst alkotna). A színek szerepe felcserélhető, ezért feltehetjük, hogy például P ilyen, így az e él egy piros és egy kék, az f él egy piros és egy zöld csúcsot köt össze.(2 pont)
A három Hamilton-kör, illetve e és f felhasználásával készítjük el a keresett utat. Ehhez a K-beli, illetve Z-beli Hamilton-körökből hagyjuk el az e-nek, illetve az f-nek a K, illetve Z-beli végpontjára illeszkedő egyik élét. Így két utat kapunk, amelyek K, illetve Z minden csúcsát tartalmazzák.(1 pont)
Az e és f élek P-beli végpontja legyen u és v. Ekkor $u \neq v$, különben v-nek két, tőle különböző színű szomszédja volna. Ezért a P-beli Hamilton-kör két, u és v közötti „íve” két különböző utat ad u és v között; válasszuk ki ezek közül a hosszabbat (vagy legalábbis a másiknál nem rövidebbet). (2 pont)
Az eddig megtalált 3 útból, illetve e-ből és f-ből összeálló út minden kék és zöld csúcsot tartalmaz és a pirosakból is legföljebb csak 4-et hagy ki (mert az e és f élek P-beli végpontjain kívül 8 piros csúcs van, de a választott ív ezek közül legalább 4-et tartalmaz). (2 pont)
Mivel a kapott út legalább 26 csúcsú, így valóban legalább 25 éle van. (1 pont)

A feladat eredeti kitűzése sajnos hibás volt, hiányzott a „minden csúcs legföljebb 1, tőle különböző színű csúccsal szomszédos” feltétel. Emiatt egy megoldót sem érhet hátrány: maximális pontot ér az is, ha valaki ellenpéldát mutat a hiányosan kitűzött állításra, valamint az is, ha valaki a fenti megoldást írja le, de kihagyja belőle a hiányzó feltétel szerepét.