**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**Pótzárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
**a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz**
2021. május 18.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldásának főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, ami egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amiből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

**1.** A $G$ egyszerű gráf csúcsai legyenek egy 10 elemű halmaz 4 elemű részhalmazai. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos $G$-ben, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Hány éle van $G$-nek? (Adjuk meg a végeredmény számszerű értékét is. Ennek kiszámításához számológépet használni szabad ugyan, de a megoldásból derüljön ki, hogy a végeredményt hogyan lehetne megkapni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

$G$ csúcsainak száma $\binom{10}{4}$ (az $\binom{n}{k}$ definíciója szerint), (1 pont)
aminek az értéke a tanultak szerint $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = 210$. (1 pont)
$G$-ben minden csúcs foka $\binom{6}{4} =$ (1 pont)
$= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!} = 15$, (1 pont)
mert ha $G$ csúcsai a $H$ alaphalmaz négy elemű részhalmazai, akkor minden $X \subset H$ csúcs a hat elemű $H \setminus X$ halmaz négy elemű részhalmazaival szomszédos. (3 pont)
A tanultak szerint $G$ élszáma a csúcsok fokszámösszegének a fele, (1 pont)
vagyis $\frac{210\cdot 15}{2} = 1575$. (2 pont)
Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért.

**2.** A tíz csúcsú $G$ teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Minden $1 \leq i < j \leq 10$ esetén az $\{i, j\}$ él súlya legyen $\left\lfloor \frac{2j-i}{3} \right\rfloor$ (ahol a $\lfloor\ \rfloor$ alsó egészrészt jelöl). Adjunk meg $G$-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát.

* * * * *

Kruskal algoritmusát fogjuk futtatni, a tanultak szerint ugyanis ez minimális összsúlyú feszítőfát ad. (Ez a pontszám akkor jár, ha a megoldó – akár a név említése nélkül – jelzi, hogy ezt az algoritmust fogja futtatni és nyoma van annak, hogy a futtatást elkezdi.) (2 pont)

Az eljárás először három 1 súlyú élt választ, például az $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ és $\{3, 4\}$ éleket. (1 pont)

Valóban, mivel minden élsúly pozitív egész és ez a három él nem alkot kört, ezért ezek kiválasztása megfelel az algoritmus helyes működésének. (1 pont)

Ekkor a megmaradt egyetlen 1 súlyú élt, az $\{1, 3\}$-at az eljárás nem választja ki, mert kört alkotna a korábbiakkal. (1 pont)

Így a 2 súlyú $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$ és $\{6, 7\}$ élek kiválasztásával folytatódhat az algoritmus végrehajtása (hiszen ezzel a körmentességet fenntartjuk). (1 pont)

Bár vannak még 2 súlyú élek, de ezek mind az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon belül futnak, így az eljárás ezeket nem választja ki (hiszen ezzel kört hozna létre). (1 pont)

Valóban, ha $j \geq 8$, akkor $i < j$ miatt $2j - i \geq 2j - (j - 1) = j + 1 \geq 9$, így az $\{i, j\}$ él súlya már legalább 3. (1 pont)

Ezért az algoritmus futtatása befejeződhet például a 3 súlyú $\{7, 8\}$, $\{8, 9\}$ és $\{9, 10\}$ élek kiválasztásával. (1 pont)

Mivel ezzel az élek száma elérte a csúcsszám mínusz 1-et, az algoritmus futása itt megáll (1 pont)
és a kapott feszítőfa az $1, 2, \ldots, 10$ csúcsokon ebben a sorrendben végighaladó Hamilton-út. (0 pont)

Természetesen más helyes, minimális (vagyis 18) összsúlyú feszítőfa is megadható. Annak indoklása, hogy háromnál több 2 súlyú élt az eljárás nem választhat ki, a fenti rövid számolás helyett a 2 súlyú élek felsorolásával is történhet: ezek a fenti megoldásban az eljárás által kiválasztottakon kívül a $\{2, 5\}$, a $\{3, 5\}$ és a $\{4, 6\}$.

**3.** Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfot teljes páros gráfnak nevezünk, ha $A$ minden csúcsa össze van kötve $B$ minden csúcsával (egy éllel). Hány különböző 100 csúcsú teljes páros gráf létezik, aminek van Hamilton-köre? (Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak.)

* * * * *

Jelöljük $K_{a,b}$-vel azt a teljes páros gráfot, aminek a kisebbik (nem nagyobbik) osztálya $a$, a másik osztálya $b$ csúcsú.

Ha $a < b$, akkor a kisebbik osztály $a$ darab csúcsát a gráfból törölve a kapott gráfnak $a$-nál több komponense lesz. (1 pont)

Valóban, ezzel a másik osztály megmaradó $b$ csúcsa mind izolált pont lesz, így ezek mind külön komponenst alkotnak. (1 pont)

Így a Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel sérül, vagyis az $a < b$ esetben $K_{a,b}$-nek nincs Hamilton-köre. (3 pont)

Ha viszont $a = b = 50$, akkor $K_{50,50}$-ben könnyű megadni egy Hamilton-kört: ha $u_1, u_2, \ldots, u_{50}$ az egyik és $v_1, v_2, \ldots, v_{50}$ a másik osztály csúcsai, akkor az $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{50}, v_{50}, u_1$ sorrendben bejárva a csúcsokat Hamilton-kört kapunk. (4 pont)

Így (izomorfiától eltekintve) egyetlen olyan, 100 csúcsú teljes páros gráf létezik, amiben van Hamilton-kör: a $K_{50,50}$. (1 pont)

Azt, hogy $K_{50,50}$-ben van Hamilton-kör, a Dirac-tétellel is lehet indokolni (hiszen a gráf egyszerű, a csúcsok száma 100 és minden pont foka 50).

**4.** A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Minden $1 \leq i \leq 7$ és $1 \leq j \leq 7$ esetén $a_i$ akkor legyen szomszédos $b_j$-vel, ha a jobbra látható mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt $G$-ben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Például $M = \Big\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_4\}, \{a_3, b_1\}, \{a_4, b_7\}, \{a_5, b_3\}, \{a_6, b_5\}\Big\}$ 6 élű párosítás $G$-ben (hiszen ezek közül semelyik két élnek nincs közös végpontja). (2 pont)
Az $X = \{a_2, a_3, a_5, b_2, b_5, b_7\}$ halmaz lefogó ponthalmaz $G$-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető: a megfelelő sorok és oszlopok együtt minden 1-est tartalmaznak). (3 pont)
$M$ létezése bizonyítja a $\nu(G) \geq 6$ állítást, $X$ létezése pedig a $\tau(G) \leq 6$ állítást. (1+1 pont)
Így a tanult $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás miatt $G$-re $6 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 6$, amiből $\nu(G) = \tau(G) = 6$.(2 pont)
Ezért a megadott $M$ párosítás maximális és a megadott $X$ lefogó ponthalmaz minimális. (1 pont)
A $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni, ami szerint páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$. A fenti pontozás szerinti utolsó 5 pont viszont csak annak jár, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális és a megadott lefogó ponthalmaz minimális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt" nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. Azonban a párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását is lehet az algoritmusra alapozni: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben $X$ az $A$-beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető $B$-beliekből és az alternáló úton el nem érhető $A$-beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

**5.** A $G$ gráf legyen egy 6 csúcsú (és 5 élű) út komplementere. Határozzuk meg $G$-nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

$G$-ben a maximális fokszám $\Delta(G) = 4$ (mert $G$-nek két 4 fokú és négy 3 fokú csúcsa van). (2 pont)
Ezért a tanultak szerint $\chi_e(G) \geq \Delta(G) = 4$. (2 pont)
$G$ élei (könnyen) megszínezhetők 4 színnel; egy helyes színezésért járó pontszám: (4 pont)
Mivel $G$ élei a fentiek szerint 4 színnel megszínezhetők, de kevesebbel nem, ezért $\chi_e(G) = 4$.(2 pont)
$G$ helyes felrajzolásáért megadható a pontozás szerinti első 2 pontból 1.

**6*.** Legyen adott egy $G$ irányított gráf, az $s, t \in V(G)$ termelő, illetve fogyasztó csúcsok, a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény, valamint egy $e$ él, amire $c(e) > 0$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha van olyan minimális kapacitású $st$-vágás, amiből $e$ kilép, akkor minden $f$ maximális értékű folyam esetén $f(e) = c(e)$.

b) Ha minden $f$ maximális értékű folyam esetén $f(e) = c(e)$, akkor van olyan minimális kapacitású $st$-vágás, amiből $e$ kilép.

(Az $e = (u, v)$ él *kilép* az $X$ vágásból, ha $u \in X$ és $v \notin X$.)

* * * * *

a) Az állítás igaz. Legyen ugyanis $X$ egy minimális kapacitású vágás és $f$ egy maximális értékű folyam. (0 pont)
Ekkor a tanultak szerint $m_f = \sum\{f(e) : e \text{ kilép } X\text{-ből}\} - \sum\{f(e) : e \text{ belép } X\text{-be}\} \leq$ (1 pont)
$\leq \sum\{c(e) : e \text{ kilép } X\text{-ből}\} - \sum\{0 : e \text{ belép } X\text{-be}\}$, ahol a becslésekhez a folyam definíciójából a $0 \leq f(e) \leq c(e)$ feltételeket használtuk. (1 pont)
A jobb oldalon az $X$ vágás $c(X)$ kapacitását kaptuk, amiről a Ford-Fulkerson tétel miatt tudjuk, hogy $m_f$-fel egyenlő. Ezért az $X$-ből kilépő élekre az $f(e) \leq c(e)$ becslések valóban mind egyenlőséggel kell teljesüljenek. (1 pont)
Ha egy megoldás a szemléletre építve indokolja az állítás igaz voltát, az – a szöveg meggyőző erejétől függően – ezért legföljebb 2 pontot kaphat. Például egy ilyen, nem precíz, de 2 pontot érő szöveg lehet a következő: „Ha $e$ kilép az $X$ minimális kapacitású vágásból és $f(e) < c(e)$, akkor az $X$ vágásból kevesebb termék jut át $(V(G) \setminus X)$-be, mint $X$ kapacitása. Mivel $X$ kapacitása a Ford-Fulkerson tétel miatt egyenlő a maximális folyam értékével, ezért ilyenkor $f$ nem lehet maximális folyam."

b) Ez az állítás is igaz. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $e$ nem lép ki egyetlen minimális kapacitású vágásból sem. (0 pont)

Legyen a vágások kapacitásai közül a legkisebbnek az értéke $M$. Ha a hálózatban minden vágás $M$ kapacitású, akkor az állítás nyilván igaz (mert minden olyan vágás megfelel, amiből $e$ kilép).(1 pont)

Ha viszont létezik $M$-nél nagyobb kapacitású vágás is, akkor ezek között a legkisebbek kapacitása legyen $M + \delta$, ahol $\delta > 0$. (1 pont)

Az $M$-nél nagyobb kapacitású vágások között valóban van legkisebb kapacitású, mert a vágások száma véges. (0 pont)

Csökkentsük most le $e$ kapacitását: legyen az új értéke $c'(e) = \max\{c(e) - \delta, 0\}$ (és a többi él kapacitása legyen változatlan). (1 pont)

Ekkor $c(e) > 0$ és $\delta > 0$ miatt $c'(e) < c(e)$ valóban igaz. (0 pont)

$c(e)$ csökkenése a vágások közül azoknak a kapacitását érinti, amikből $e$ kilép. Mivel ezek között nem volt $M$ kapacitású, ezért a minimális vágás kapacitása továbbra is $M$ lesz (hiszen az érintett vágások esetében is a csökkenés mértéke legföljebb $\delta$). (1 pont)

Így a Ford-Fulkerson tétel miatt a maximális folyam értéke továbbra is $M$, vagyis létezik a hálózatban (a megváltozott kapacitásfüggvényre is) egy $M$ értékű $f$ folyam. (1 pont)

Ennek az $f$ folyamnak az értéke tehát maximális az eredeti kapacitásfüggvényre nézve is, továbbá $f(e) \leq c'(e) < c(e)$. (1 pont)

Ez tehát ellentmond a megmutatandó állítás feltételének és ezzel bizonyítja az állítást. (1 pont)