Bevezetés a számításelméletbe II.
Aláíráspótló zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2021. május 27.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

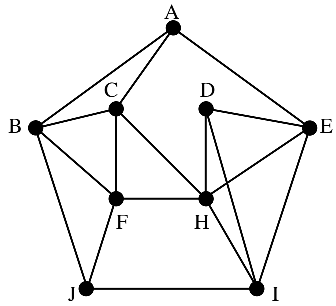
Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Egy 20 fős önkormányzati képviselőtestület a tagjai közül 5 fős bizottságot választ a községi Töpörtyű Napok eseménysorozatának megszervezésére. A bizottság tagjai közül néhányan a polgármesteri keretből kiemelt díjazásban részesülnek; erről a polgármester saját hatáskörben dönt, így a kiemelten díjazottak száma 0 és 5 között bármennyi lehet. Hányféleképpen alakulhat meg a bizottság (ha két esetet nem csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a bizottság tagsága más, hanem akkor is, ha nem ugyanazok a kiemelten díjazottak)? (Adjuk meg a végeredmény számszerű értékét is. Ennek kiszámításához számológépet használni szabad ugyan, de a megoldásból derüljön ki, hogy a végeredményt hogyan lehetne megkapni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

A bizottság tagjait $\binom{20}{5}$-féleképpen választhatjuk ki (az $\binom{n}{k}$ definíciója szerint), (2 pont)
aminek az értéke a tanultak szerint $\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5!} = 15\ 504$. (2 pont)
Ezután a bizottság mind az öt tagjára kétféleképpen dönthetünk arról, hogy kiemelt díjazásban részesüljön-e. Így (egy adott bizottságra) a lehetőségek száma $2^5 = 32$, (2 pont)
hiszen az elsőtől az ötödikig haladva bárhogyan is döntöttünk a korábbi tagokról, az újabb tagról való döntésünk megkétszerezi az addigi lehetőségek számát (vagy az ismétléses variációról tanultakra hivatkozással). (1 pont)
Mivel az először mondott $\binom{20}{5}$ lehetőség mindegyike 2^5-féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért az összes lehetőségek száma $\binom{20}{5}\cdot 2^5 =$ (2 pont)
$= 15\ 504 \cdot 32 = 496\ 128$. (1 pont)
Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért. Ha azonban valaki nem számolja ki a (részeredmények, illetve a) végeredmény kért értékeit, a vonatkozó pontokat ne kapja meg.

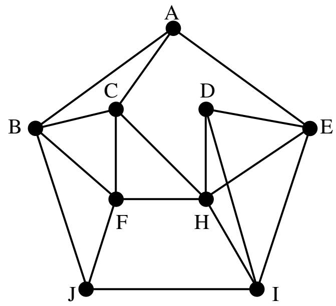
2. A jobbra látható G gráf mely e éleire teljesül, hogy G-ben van olyan séta, ami e-n kívül a gráf mindegyik élét tartalmazza? Minden ilyen e élre adjunk is meg egy ilyen sétát.



* * * * *

A feladat kérdése az, hogy mely e élekre van Euler-séta a G-ből az e törlésével kapott gráfban.(2 pont)
Mivel az Euler-séta létezésének szükséges feltétele, hogy a gráfban legföljebb 2 páratlan fokú csúcs legyen, ezért úgy kell egy élt elhagynunk, hogy ez teljesüljön. (1 pont)
G-nek négy páratlan fokú pontja van: A, D, H és J. Mivel egy e él elhagyása e végpontjai fokának a paritását változtatja meg, ezért olyan e élt kell elhagynunk, ami ezek között a csúcsok között fut (hogy ezáltal a páratlan fokú csúcsok száma 2-re csökkenjen). (1 pont)
Mivel eközött a négy csúcs között egyedül D és H szomszédosak, ezért az egyetlen lehetőség az $e = \{D, H\}$ él elhagyása. (2 pont)
A $\{D, H\}$ él elhagyása után kapott gráfban valóban van Euler-séta; erre számtalan lehetőség van, egy ilyennek a megadásárt járó pontszám: (4 pont)
Ha valaki nem ad meg egy konkrét Euler-sétát, akkor az utolsó 4 pontból 1-et megkaphat azért, ha a tanult tételre való hivatkozva állítja annak a létét: mivel a kapott gráf összefüggő és pontosan 2 páratlan fokú csúcsa van, ezért tartalmaz Euler-sétát. (Az összefüggőségi feltétel említésének a hiánya esetén azonban ez az 1 pont már nem adható meg.) Ettől függetlenül adható az utolsó 4 pontból 1 annak a megállapításáért is, hogy a keresett Euler-séta végpontjai A és J kell legyenek (mert ezek a kapott gráf páratlan fokú csúcsai). Eközül a kétszer 1 pont közül akár mindkettő is megadható (ha mindkét megállapítás szerepel a dolgozatban) – de természetesen csak a pontozás szerinti utolsó 4 pont helyett, nem pedig azokon felül.

3. Határozzuk meg jobbra látható G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.



* * * * *

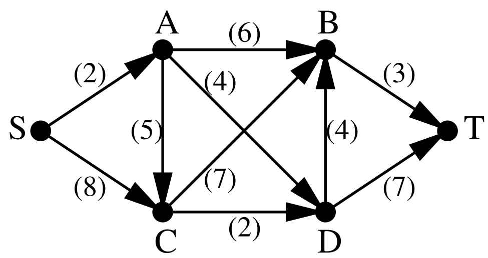
G-ben a D, E, H és I csúcsok klikket alkotnak, (2 pont)
ezért G maximális klikkmérete $\omega(G) \geq 4$. (2 pont)
G csúcsai megszínezhetők négy színnel. Erre rengeteg jó lehetőség van, egy ilyennek a megadásáért járó pontszám: (3 pont)
Következésképp $\chi(G) \leq 4$. (1 pont)
Ezekből és a tanult $\omega(G) \leq \chi(G)$ összefüggésből $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq 4$. Így $\chi(G) = 4$. (2 pont)
A négy csúcsú klikkből és a négy színnel való színezésből máshogyan is következtethetünk arra, hogy $\chi(G) = 4$: az előbbiből következik, hogy négynél kevesebb színnel G csúcsai nem megszínezhetők (mert már a klikk csúcsaihoz is szükséges ennyi szín), így a színezés bizonyítja, hogy a színek lehetséges minimális száma (vagyis $\chi(G)$ értéke) négy.

4. A 20 csúcsú G gráf élei közül bárhogyan is választunk ki 8-at, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire legalább kettő illeszkedik a kiválasztott élek közül. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választunk ki G élei közül 12-t, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire egy sem illeszkedik a kiválasztott élek közül.

* * * * *

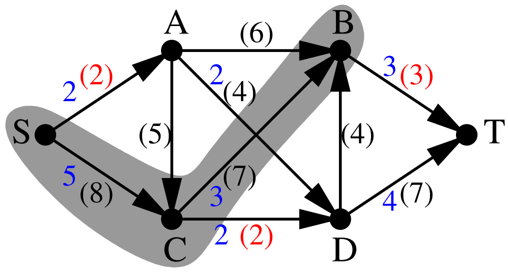
A feladatban szereplő, G-re vonatkozó állítás azt jelenti, hogy G-ben a független élek maximális száma $\nu(G) \leq 7$. (1 pont)
Valóban, $\nu(G) \geq 8$ éppen azt jelentené, hogy létezik G-ben 8 élű párosítás – vagyis 8 olyan él, amik közül minden csúcsra legföljebb egy illeszkedik. (3 pont)
A bizonyítandó állítás azt jelenti, hogy a G-beli minimális lefogó élhalmaz mérete $\varrho(G) \geq 13$. (1 pont)
Valóban, $\varrho(G) \leq 12$ éppen azt jelentené, hogy megadható G-ben 12 él úgy, hogy közülük minden csúcsra illeszkedik legalább egy. (3 pont)
Így a bizonyítandó állítás következik Gallai tételéből: $\nu(G) + \varrho(G) = 20$ miatt a $\nu(G) \leq 7$ feltételből valóban adódik, hogy $\varrho(G) \geq 13$. (2 pont)
A fenti megoldás csak akkor helyes, ha G-nek nincs izolált pontja (különben a gráfban nincs is lefogó élhalmaz és így Gallai tétele sem alkalmazható). Ha G-nek mégis van izolált pontja, akkor viszont a bizonyítandó állítás magától értetődően igaz: akárhányat is választunk G élei közül, egy izolált pontra teljesülni fog, hogy rá egy sem illeszkedik ezek közül. (0 pont)
Ha egy megoldó kitér arra az esetre, amikor G-nek van izolált pontja (és erre belátja az állítást), akkor ezért legföljebb 2 pontot kaphat – de természetesen csak akkor, ha ezzel a feladatra kapott összpontszáma nem haladja meg a 10-et.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be és egy minimális ST-vágást.



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 7. (2 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható $X = \{S, C, B\}$ vágás kapacitása (vagyis az X-ből kilépő élek összkapacitása, az ábrán pirossal) szintén 7. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
ezért a 7 kapacitású vágás bizonyítja, hogy a 7 értékű folyam maximális (2 pont)
és a 7 értékű folyam bizonyítja, hogy a 7 kapacitású vágás minimális. (2 pont)
Az utolsó 5 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. Ez persze történhet máshogy is, mint a fenti megoldásban (például a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy a tanultak szerint az maximális folyamot talál, illetve annak a leírásával, hogy az utolsó segédgráfban mely pontok érhetők el s-ből), de üres frázisok, mint például „a Ford-Fulkerson tétel miatt” nem érnek pontot.



6*. Egy G összefüggő gráf u és v csúcsainak *távolsága* alatt az u és v közötti legrövidebb út hosszát (vagyis éleinek a számát) értjük. A G gráf *átmérője* alatt a G-beli csúcspárok távolságának maximumát (vagyis a legtávolabbi csúcsok távolságát) értjük. Mutassuk meg, hogy ha a 24 csúcsú G egyszerű gráfban az egyik csúcs foka 5, az összes többi csúcs foka pedig 3, akkor G átmérője legalább 4.

* * * * *

Jelölje az egyetlen 5 fokú csúcsot v. Indítsuk el v-ből a BFS algoritmust. Ekkor az 1 távolságra lévő csúcsok száma 5. Mivel ezeknek a foka 3 és az egyik szomszédjuk v, ezért a v-től 2 távolságra lévő csúcsok száma legföljebb 10. (1 pont)
Ezzel a BFS bejárás eddig legföljebb $1 + 5 + 10 = 16 < 24$ csúcsot járt be, így kell legyen még bejáratlan csúcs; legyen ezek egyike s. Ekkor tehát v és s távolsága legalább 3. (2 pont)
Indítsunk most egy új BFS bejárást s-ből. Ekkor az 1 távolságra lévő csúcsok száma 3. Mivel ezeknek a foka is 3 (mert v-nek az s-től való távolsága legalább 3) és az egyik szomszédjuk s, ezért az s-től 2 távolságra lévő csúcsok száma legföljebb 6. (2 pont)
Hasonlóan folytatva: az s-től 2 távolságra lévő csúcsok foka is 3 és az egyik szomszédjuk egy s-től 1 távolságra lévő csúcs, ezért az s-től 3 távolságra lévő csúcsok száma legföljebb 12. (2 pont)
Eddig tehát az s-től indított BFS eljárás legföljebb $1 + 3 + 6 + 12 = 22 < 24$ csúcsot járt be. Így kell legyen olyan csúcs, aminek az s-től való távolsága 4, (2 pont)
mert G összefüggő, így minden csúcsnak van (véges) távolsága s-től. (0 pont)
Mivel tehát van olyan csúcspár, amiknek a távolsága 4, ezért a G-beli csúcspárok közötti maximális távolság – vagyis G átmérője – valóban legalább 4. (1 pont)