Páros gráfok élszínezése

Ha G egy (tetszőleges) gráf, akkor $\chi_e(G)$ jelöli a G élkromatikus számát, vagyis azt a legkisebb számot, ahány színnel a G élei megszínezhetők úgy, hogy a közös csúcsra illeszkedő élek mindig különböző színt kapjanak.

Nyilvánvaló megfigyelés, hogy ha $\Delta(G)$ jelöli a G-beli maximális fokszámot (vagyis a csúcsok fokszámai közül a legnagyobbat), akkor $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ teljesül. Valóban, ha a v csúcs foka $\Delta(G)$, akkor a v-re illeszkedő élek közül bármely kettőt különböző színűre kell színezni, ez pedig máris $\Delta(G)$ különböző színt jelent.

Vizing tétele szerint $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül minden egyszerű G gráfra. Ezek szerint, ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G)$ a $\Delta(G)$ és a $\Delta(G) + 1$ értékek valamelyike. Az alábbi tétel viszont azt mondja ki, hogy ha G páros gráf, akkor a két lehetőség közül mindig a „jobb” valósul meg – és ez ráadásul nem csak egyszerű gráfokra igaz.

Tétel. (Kőnig Dénes, 1916)
Legyen $G = (A, B; E)$ *páros gráf. Ekkor* $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

Bizonyítás: Megadunk egy (viszonylag) egyszerű algoritmust, amely a G páros gráf éleit megszínezi $\Delta(G)$ darab színnel; ebből természetesen a tétel állítása következik.

Jelölje a G éleit $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Az algoritmus egymás után foglalkozik a G éleivel és a sorra kerülő élt mindig megszínezi a rendelkezésre álló $\Delta(G)$ szín valamelyikével (mégpedig helyesen, vagyis szomszédos élek különböző színt kapnak). Eközben előfordulhat, hogy a korábban már megszínezett élek egy részét át kell színezni más színűre, de semelyik él nem változik vissza színtelenné.

Tegyük fel tehát, hogy az $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ élek már kaptak valamilyen színt és legyen $e_i = \{u, v\}$, ahol $u \in A$ és $v \in B$. Mivel u-ra és v-re is legföljebb $\Delta(G)$ él illeszkedik, de ezek között még van színtelen (nevezetesen e_i), ezért mindkét csúcsnak van „szabad színe” - vagyis olyan szín, amilyen színű él még nem illeszkedik a csúcsra. Ha u-nak és v-nek van közös szabad színe, akkor persze e_i megkaphatja ezt a színt és készen vagyunk. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet.

Legyen u egy szabad színe a piros, v egy szabad színe a kék. Legyen C a G-nek az a részgráfja, amely (G összes csúcsából és) a jelenlegi színezés szerint pirosra vagy kékre színezett élekből áll. Ekkor C-ben minden pont foka legföljebb 2, hiszen minden csúcsra legföljebb egy piros és egy kék él illeszkedhet. Így a C diszjunkt utakból és körökből áll. Ráadásul u és v foka C-ben csak 1 lehet, hiszen u-nak a piros, v-nek a kék szabad színe. Vagyis u és v is egy-egy C-beli út végpontja.

Legyen P_u az a C-beli út, amelynek a végpontja u. Állítjuk, hogy v nincs rajta P_u-n. Ha ugyanis rajta volna, akkor nyilván v volna a P_u másik végpontja. Ekkor P_u páratlan sok élből állna, hiszen a páros gráf egyik osztályából (A-ból) indul és a másikban (B-ben) ér véget. Mivel P_u-n nyilván váltakozva következnek kék és piros élek és az első (u-ra illeszkedő) éle kék (hiszen u-nak a piros szabad színe), ezért az utolsó éle is kék kell legyen (mert P_u páratlan sok élű). Így P_u végpontja mégsem lehet v, mert arra nem illeszkedik kék él.

Fessük át a P_u kék éleit pirosra és a piros éleit kékre. Ezzel a színezést nyilván nem rontottuk el, viszont mostantól az u-nak a kék szabad színe lesz. Mivel a P_u élein zajló színcsere (a fentiek szerint) a v-re illeszkedő éleket nem érintette, ezért a kék v-nek is szabad színe maradt. Így az e_i él kékre színezésével továbbra is helyes színezést kapunk. $\square$

Megjegyezzük, hogy a fenti bizonyításban leírt algoritmus hatékony is: a segítségével nagy méretű páros gráfok élei is „gyorsan” megszínezhetők a lehető legkevesebb, vagyis $\Delta(G)$ színnel.