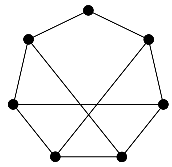
BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE II.
KILENCEDIK GYAKORLAT, 2024. április 16.



**1.** Legyen $G$ egyszerű, összefüggő páros gráf, melynek mindkét osztálya $n$ csúcsú, és az egyik osztályban minden csúcs foka különböző. Mutassuk meg, hogy $G$-ben van teljes párosítás.

**2.** Határozzuk meg a jobbra látható gráf élkromatikus számát.

---

**3.** Határozzuk meg az alábbi gráfok élkromatikus számát.
a) $\overline{C_6}$, vagyis a 6 csúcsú kör komplementere; (ZH, 2013. május 16.)
b) $K_{11}$, vagyis a 11 csúcsú teljes gráf.

**4.** Egy tíznapos üdülés szervezője az üdülés mind a tíz napjára felajánl tizenhat lehetséges program közül pontosan ötöt. Ugyanazt a programot sohasem ajánlja fel két egymást követő napra. Mutassuk meg, hogy biztosan kiválasztható minden napra az aznapra felajánlott programok egyike úgy, hogy csupa különböző programot válasszunk ki. (ZH, 2010. május 18.)

**5.** 64 kockacukorból építettünk egy $(4 \times 4 \times 4)$-es nagyobb kockát (amelynek tehát az élhosszúsága 4 kockacukornyi). A $G$ gráf csúcsai legyenek a kockacukrok, két különböző csúcs pedig akkor legyen szomszédos $G$-ben, ha a megfelelő két kockacukor közös lap mentén szomszédos az építményben. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t. (ZH, 2011. március 17.)

**6.** Határozzuk meg annak az (5 csúcsú és 10 élű) gráfnak az élkromatikus számát, melyet egy öt hosszú körből az élek megduplázásával kapunk.

**7.** Az előző feladatsor első feladatában szereplő törzsben egy korábbi évben 10 fiú és 10 lány szeretett volna megházasodni és mindnyájan legalább 5 ellenkező nemű házasulandónak voltak hajlandók örök hűséget esküdni. Mutassuk meg, hogy ekkor létre lehetett hozni 10 házaspárt.

---

**8.** A 10 csúcsú $G$ gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t. (ZH, 2012. március 12.)

**9.** A $G$ egyszerű gráf $v$ csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t. (ZH, 2016. április 28.)

**10.** Egy 5 csúcsú teljes gráf egy Hamilton-körének az éleit helyettesítsük két-két párhuzamos éllel. Határozzuk meg az így kapott (5 csúcsú és 15 élű) gráf élkromatikus számát. (ZH, 2022. június 1.)

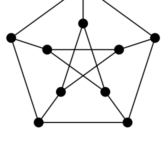
**11.** Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

**12.** a) Mutassuk meg, hogy a 19 résztvevős körmérkőzéses bajnokságok lebonyolíthatók 19 fordulóban. (Minden csapat mindenki mással egyszer játszik, egy fordulóban egy csapat legfeljebb egyszer léphet pályára.)
b) Mutassuk meg, hogy a 20 résztvevős körmérkőzéses bajnokságok is lebonyolíthatók 19 fordulóban.

**13.** Bizonyítsuk be, hogy az $e$ élű $G$ gráfban fennállnak az alábbi összefüggések.
a) $\chi_e(G) + \nu(G) \leq e + 1$
b) $\chi_e(G) \cdot \nu(G) \geq e$

**14.** A kilenc csúcsú $G$ egyszerű gráfban öt csúcs foka 4, a maradék négy csúcs foka 3. Igazoljuk, hogy $\nu(G) = 4$.

**15.** a) Mutassuk meg, hogy ha $G$ 3-reguláris gráf, melynek van Hamilton-köre, akkor $\chi_e(G) = 3$.
b) Bizonyítsuk be, hogy az alább látható Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör.



**16.** Legyen $G$ egy 20 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen $v$ a $G$ egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet $G$-ből a $v$ (és az összes $v$-re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G - v) = \chi_e(G)$. (ZH, 2009. március 23.)

**17.** Egy szigeten $n$ törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi Minisztérium felosztja a szigetet $n$ egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Bizonyítsuk be, hogy a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része.