Bevezetés a Számításelméletbe II.

Nyolcadik gyakorlat, 2015. március 31.

1. a) 7 lány (A,B, …, G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házasulandó korba egy indián törzsben. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a jobb oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

b) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

2. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás.

---

3. Egy $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \le i \le 9$ és $1 \le j \le 9$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt. (ZH, 2013. május 16.)

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&1&1&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

4. Legyen G egyszerű, összefüggő páros gráf, melynek mindkét pontosztályában n pont van, és az egyik pontosztályban minden pont foka különböző. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

5. Egy táncmulatságon 25 fiú és 25 lány van jelen. Minden lány ismer legalább 13 fiút, és minden fiú ismer legalább 13 lányt. Mutassuk meg, hogy tudnak mindnyájan egyszerre táncolni egy páros táncot úgy, hogy mindenki ismerőssel táncol.

6. Egy 100 csúcsú G gráf komplementerében van teljes párosítás. Mutassuk meg, hogy G színezhető 50 színnel. (ZH, 2010. október 18.)

7. Egy 20 csúcsú páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy van a gráfban teljes párosítás.

---

8. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix i. sorának j. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben B-t fedő párosítás. (ZH, 2014. október 27.)

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

9. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük $2n$ különböző fajta csokit úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokik közül. Továbbá minden emberre teljesül, hogy ha ő valamelyik fajta csokit nem szereti, akkor a házastársa ezt a fajtát biztosan szeretni fogja. Bizonyítsuk be, hogy a csokik szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

10. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban van teljes párosítás? (ZH, 2010. május 6.)

11. Egy 19 csúcsú páros gráfban 17 csúcs foka 6, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy van a gráfnak 9 élű párosítása.

12. A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

13*. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \ge 6$. (ZH, 2001. május 30.)