

1. a) 7 lány (A, B, ..., G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házassulandó korba egy indián törzsbén. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a jobb oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

b) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

2. Legyen G egyszerű, összefüggő páros gráf, melynek mindkét pontosztályában n pont van, és az egyik pontosztályban minden pont foka különböző. Mutassuk meg, hogy G -ben van teljes párosítás.

3. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i, j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha a jobbra látható mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G -ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt. (ZH, 2015. április 23.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Egy tíznapos üdülés szervezője az üdülés mind a tíz napjára felajánl tizenhat lehetséges program közül pontosan ötöt. Ugyanazt a programot sohasem ajánlja fel két egymást követő napra. Mutassuk meg, hogy biztosan kiválasztható minden napra az aznapra felajánlott programok egyike úgy, hogy csupa különböző programot válasszunk ki. (ZH, 2010. május 18.)

5. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás. (ZH, 2015. április 23.)

6. Egy 20 csúcsú G páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Határozzuk meg a $\nu(G)$ értéket.

7*. Egy 100×100 -as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2 -es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le. (ZH, 2021. április 30.)

8. Egy 100 csúcsú G gráfban van teljes párosítás. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq 50$. (ZH, 2010. október 18.)

9. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix i . sorának j . eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G -ben B -t fedő párosítás. (ZH, 2014. október 27.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Egy táncmulatságon 25 fiú és 25 lány van jelen. Minden lány ismer legalább 13 fiút, és minden fiú ismer legalább 13 lányt. Mutassuk meg, hogy tudnak mindnyájan egyszerre táncolni egy páros táncot úgy, hogy mindenki ismerőssel táncol.

11. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van teljes párosítás? (ZH, 2010. május 6.)

12. Egy 19 csúcsú páros gráfban 17 csúcs foka 6, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy van a gráfnak 9 élű párosítása.

13. Valaki találmásra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

14. A sakktáblán találmásra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

15. Egy szigeten n törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi Minisztérium felosztja a szigetet n egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyét kapjon. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Bizonyítsuk be, hogy a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része.