

1. a) 7 lány (A,B, ..., G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házasulandó korba egy indián törzsbén. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a jobb oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥					♥
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

b) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

2. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás. Igaz-e az állítás 3 helyett 4 pont esetén?

3. 9 lány (A,B, ..., I) és 9 fiú (1-től 9-ig) ért házasulandó korba az indián törzsbén. A törzsfőnök most is a lehető legtöbb házaspárt szeretné létrehozni. A tanult algoritmust használva oldjuk meg a törzsfőnök feladatát és (a Königtétel fogalmait használva) adjunk meg olyan bizonyítékot is, ami meggyőzi a törzsfőnököt arról, hogy a megadott párosítás valóban maximális.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	♥		♥	♥			♥	♥	♥
2		♥				♥			
3		♥			♥	♥			♥
4	♥		♥	♥	♥		♥	♥	♥
5		♥			♥				
6					♥	♥			
7	♥	♥			♥	♥	♥		♥
8		♥			♥	♥			
9		♥				♥			

4. Egy táncmulatságon 25 fiú és 25 lány van jelen. Minden lány ismer legalább 13 fiút, és minden fiú ismer legalább 13 lányt. Mutassuk meg, hogy tudnak mindnyájan egyszerre táncolni egy páros táncot úgy, hogy mindenki ismerőssel táncol.

5. A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

6. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás. (ZH, 2015. április 23.)

7. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha a jobbra látható mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G -ben egy maximális párosítást és egy minimális lefoglaló csúcshalmazt. (ZH, 2015. április 23.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Egy tíznapos üdülés szervezője az üdülés mind a tíz napjára felajánl tizenhat lehetséges program közül pontosan ötöt. Ugyanazt a programot soha nem ajánlja fel két egymást követő napra. Mutassuk meg, hogy biztosan kiválasztható minden napra az aznapra felajánlott programok egyike úgy, hogy a tíz napra tíz különböző programot válasszunk ki. (ZH, 2010. május 18.)

9. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

10. Egy szigeten n törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi minisztérium felosztja a szigetet n egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Így minden törzs kap egy parcellát földművelés, egyet pedig vadászat céljából. Bizonyítsuk be, hogy a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része.

11. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás. (ZH, 2015. május 4.)

12. Legyen G egyszerű, összefüggő páros gráf, melynek mindkét pontosztályában n pont van, és az egyik pontosztályban minden pont foka különböző. Mutassuk meg, hogy G -ben van teljes párosítás.

13. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 55. Mennyi a kromatikus száma, ha tudjuk, hogy a komplementere páros gráf? (ZH, 2010. március 25.)