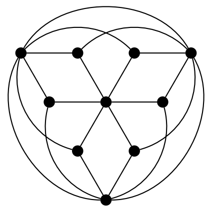
B e v e z e t é s a S z á m í t á s e l m é l e t b e I I .
Hatodik gyakorlat, 2018. március 12-23.

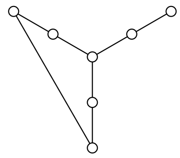
1. Intervallumgráf-e az öt csúcsú út, az öt csúcsú kör, illetve a négy csúcsú kör?

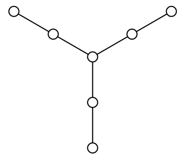
2. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét az alább látható G gráfra és adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt. (ZH, 2015. május 3. alapján)



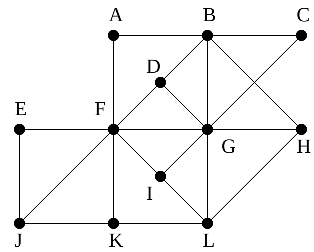
---

3. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e. (ZH, 2015. április 23.)





4. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét a jobbra látható G gráfra és adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt. (ZH, 2012. május 15. alapján)



5. A $2n$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

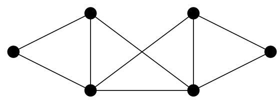
6. Bizonyítsuk be, hogy minden n csúcsú, hurokélmentes G gráfra fennállnak az alábbi összefüggések.
a) $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$ b) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$

7. Bizonyítsuk be, hogy a $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ egyenlőtlenség minden egyszerű G gráfra teljesül.

---

8. Tekintsük azokat az intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 0 és 7 közötti egész, a hosszuk pedig 2 vagy 3. Adjuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf egy optimális színezését.

9. Intervallumgráf-e a jobbra látható gráf? (ZH, 2007. április 16.)



10. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8. (ZH, 2014. március 20.)

11. Legyen M egy $n \times n$-es mátrix. Készítsük el M-ből a G páros gráfot a következőképpen: G egyik pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a másik $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$; továbbá minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az M mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem nem nulla. Mutassuk meg, hogy ha $\det M \neq 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

12. A 101 csúcsú G gráf egy 50 pontú és egy 51 pontú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\varrho(G)$ értékét.

13. Igaz-e, hogy minden G egyszerű gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, melyben (legalább) az egyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

14*. Legyen G az a gráf, melynek csúcsai a sík (összes) pontjai, két csúcsot pedig akkor kötünk össze, ha a távolságuk 1. Mutassuk meg, hogy
a) $\chi(G) \geq 4$,
b) $\chi(G) \leq 9$.

15*. Legyenek egy G gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok. Az $i \neq j$ csúcsokat öszekötjük, ha $i \mid j$ vagy $j \mid i$. Határozzuk meg a $\tau(G)$ értéket.

16*. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 8. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 8 élű párosítás.