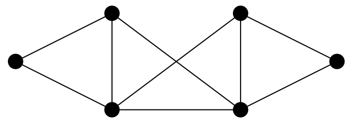
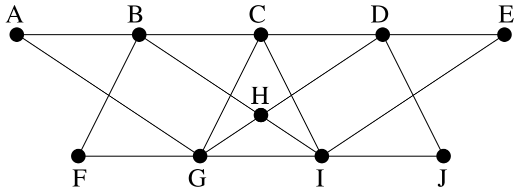
Bevezetés a Számításelméletbe II.
Hatodik gyakorlat, 2016. április 5.



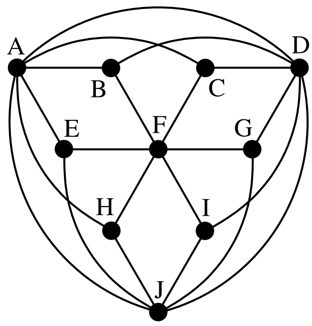
1. Intervallumgráf-e a jobbra látható gráf? (ZH, 2007. április 16.)



2. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét a jobbra látható G gráfra és adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt.

---

3. Legyen G a számegyenes következő zárt intervallumai által meghatározott intervallumgráf: $[1;3]$, $[2;4]$, $[8;11]$, $[5;11]$, $[4;9]$, $[1;6]$, $[2;7]$, $[10;11]$. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát és $\omega(G)$ klikkszámát.



4. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét a jobbra látható G gráfra és adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt. (ZH, 2015. május 4. alapján)

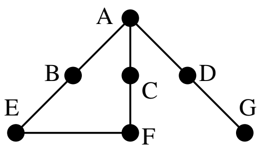
5. A $2n$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

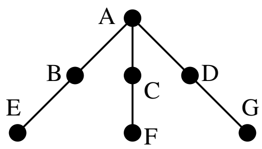
6. a) Legyen M egy maximális párosítás a G egyszerű gráfban és álljon az X csúcshalmaz az M-beli élek végpontjaiból. Bizonyítsuk be, hogy X lefogó ponthalmaz.
b) Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \le 2\nu(G)$ teljesül.

7. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú, hurokélmentes G gráfban fennállnak az alábbi összefüggések.
a) $\chi(G) + \alpha(G) \le n + 1$ b) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \ge n$

---

8. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e. (ZH, 2015. április 23.)

a) 

b) 

9. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 60\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \ne y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$, vagyis a G-beli független élek maximális számának értékét. (ZH, 2009. március 23.)

10. A $2k+1$ pontú, egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k+1$. Mennyi $\nu(G)$, a független élek maximális számának értéke? (ZH, 2003. május 13.)

11. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8. (ZH, 2014. március 20.)

12. Legyen M egy $n \times n$-es mátrix. Készítsük el M-ből a G páros gráfot a következőképpen: G egyik pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a másik $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$; továbbá minden $1 \le i, j \le n$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az M mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem nem nulla. Mutassuk meg, hogy ha $\det M \ne 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

13. Tekintsük azokat az intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legföljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát. (ZH, 2011. május 9.)